

No.07-131 講習会 (流体工学部門 企画)

境界条件の基礎と決定法



千葉科学大学 戸田和之

講演の流れ

- 数値解析とは何か
- 境界条件の役割と目的
- 境界の分類
- 計算法による、設定の違い
- 非圧縮流れ解析における境界条件の設定法
- 乱流解析における境界条件の設定法
- 圧縮性流れ解析における境界条件の設定法

流れの数値解析とは

偏微分型で書かれた基礎方程式を解く作業

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{v}$: 速度ベクトル

p : 圧力

ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z), \quad p = p(t, x, y, z)$$

微分方程式を解くとは

方程式を積分する → 積分定数の出現

例 1) $\frac{dq}{dx} = 2$

↓

$$q = 2x + C \quad C: \text{積分定数}$$

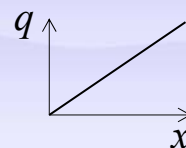
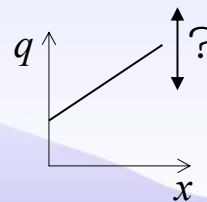
↑ 解に一意性がない



条件の付加: $q = 0$ at $x = 0$



$$q = 2x$$



例2) $\frac{d^2q}{dx^2} = 2 \Rightarrow q = x^2 + C_1x + C_2$
 (2つの条件が必要)

条件の付加

方法1：異なる2箇所で q の値を規定する

$$\begin{array}{l} q = 0 \text{ at } x = 0 \\ q = 2 \text{ at } x = 1 \end{array} \Rightarrow q = x^2 + x$$

方法2： q の値と勾配を規定する

$$\begin{array}{l} q = 0 \text{ at } x = 0 \\ dq/dx = 2 \text{ at } x = 1 \end{array} \Rightarrow q = x^2 + x$$

例3) $\begin{cases} \frac{dq}{dx} = r \\ \frac{dr}{dx} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} q = x^2 + C_1x + C_2 \\ r = 2x + C_1 \end{array}$

条件の付加

方法1：任意の位置で q と r の値を規定する

$$\begin{array}{l} q = 0 \text{ at } x = 1 \\ r = 1 \text{ at } x = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q = x^2 + x \\ r = 2x + 1 \end{array}$$

方法2：例2) に従い q を定める
 方法3：

$$q = x^2 + x \Rightarrow \begin{array}{l} q = x^2 + x \\ r = 2x + 1 \end{array}$$

C F Dにおける境界条件とは

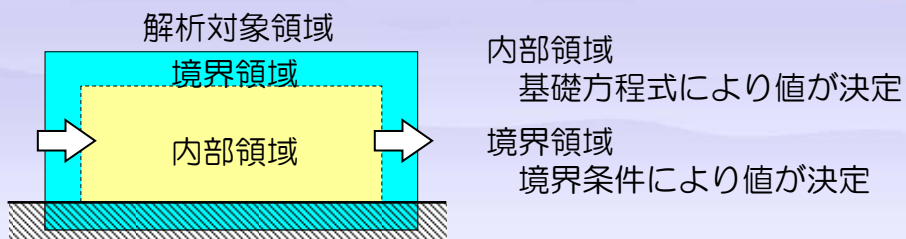
- C F Dにおける微分方程式に対する条件は、一般に境界で与えられる。 → 境界条件

基礎方程式：流体運動の性質
＋
境界条件：解の一意性
||
境界条件に対する流れの分布が決定

- 境界条件の与え方は一通りではない（例 2、例 3）
- 境界条件の間違い
 - ✓ 流れの性質は出るかも知れないが・・・
 - ✓ 何を計算をしたのか意味不明！？

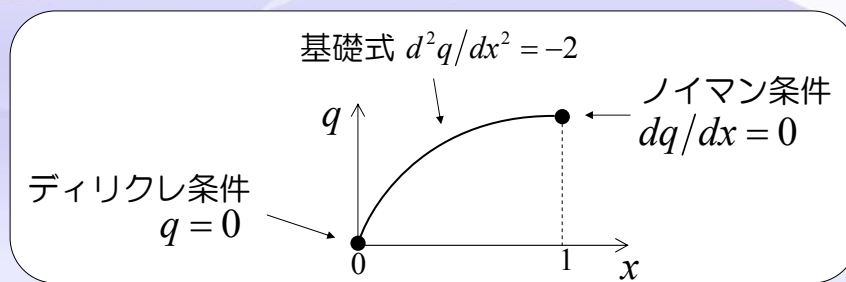
C F Dにおける境界

- 一般に流れは無限遠方まで続くが・・・
C F Dでは限られた領域しか計算できない
- 解析対象領域の境界が境界領域となり、条件設定が必要
- 計算手法によっては、境界領域が面でない場合がある
- 境界条件を設定すると、とりあえず境界の値は定まる



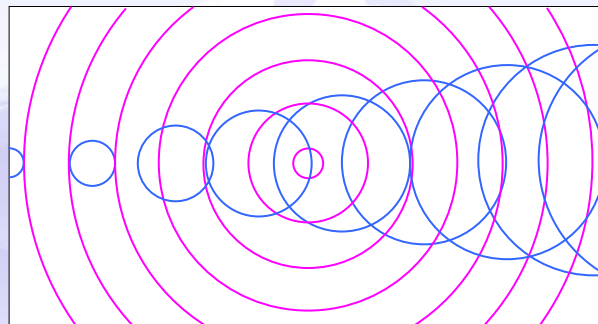
境界条件の種類

- ディリクレ条件
境界上の値を規定 → 内部領域の値が決定
- ノイマン条件
境界における性質を規定（勾配等）
→ 境界上の値は内部領域の値に従って定まる



流れの性質

流れ場では、流れに関する様々な情報が
対流・伝播 している



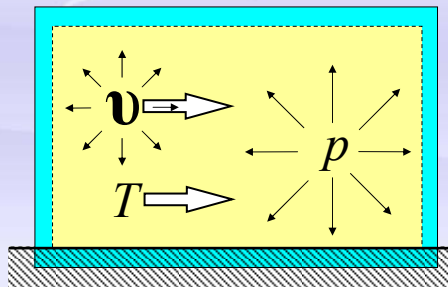
対流・伝播のイメージ

例) 非圧縮性流れの場合

速度: [下流へと対流] + [拡散] +
[低圧部へ加速]

圧力: 流量が保存され、かつ連続な分布を
全領域内でバランス (伝播) しながら決定

温度: [下流へと対流] + [拡散]



CFDにおける境界条件の目的

- 情報の流入
解析したい流れの条件を内部領域に正しく反映させる



適切な境界でディリクレ条件

- 情報の流出
内部領域に悪影響を及ぼさない

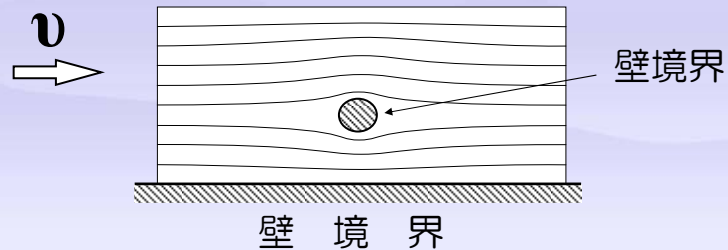


情報が反射しないようなノイマン条件

境界の分類

- 壁境界：流体の出入りのない境界
 - ✓ 滑り壁境界 → 境界面に平行な速度あり
面対称境界
 - ✓ 固体壁境界 → 境界面の速度 0

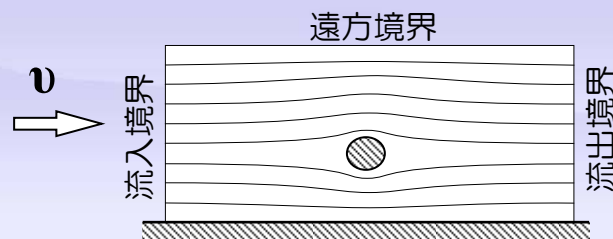
壁境界は実在する境界
→ 厳密性の高い条件設定が可能



- 流入境界：流体が入ってくる境界
- 流出境界： // 出て行く境界
- 遠方境界：内部領域における分布変化の影響を受けない境界

上記3つは開境界

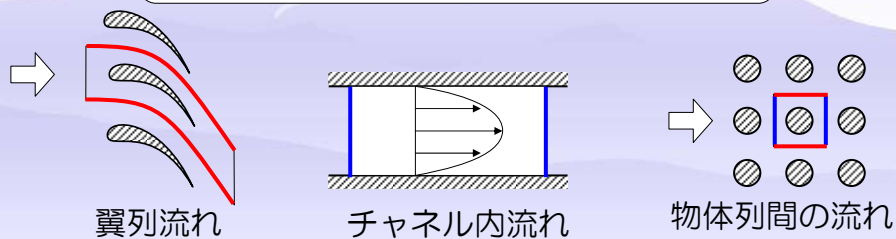
解析上の都合により現れた実在しない境界
→ 厳密性の高い条件設定が困難



- 周期境界：流れの周期性を利用し、同一分布の位置に設けた境界

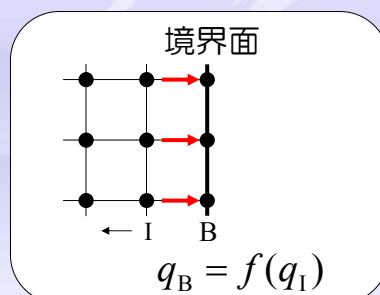
- ✓ 厳密な条件設定が可能
- ✓ 開境界を排除
(もはや、境界ではないかも)

流入出面の圧力に適用する場合には
注意が必要



計算法による設定法の違い

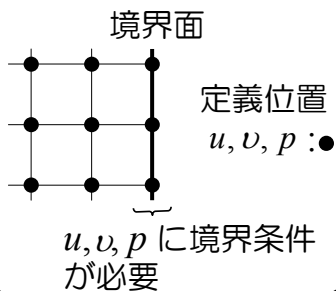
- 有限差分法・有限体積法・粒子法
 - ✓ 原則として、境界上の物理量まで基礎方程式を解くことはできない
 - ✓ ノイマン条件では、境界領域の物理量は微分係数等を利用して内部領域から外挿



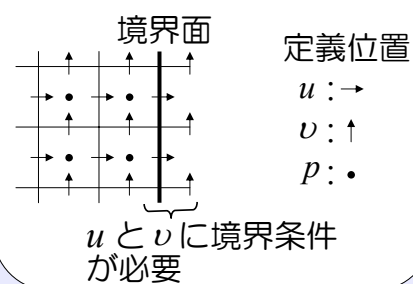
- 有限差分法

- ✓ スキームの高精度化に伴い、境界領域が拡大（境界に数面必要）
- ✓ レギュラー格子とスタガード格子では境界条件に必要な物理量が異なる場合がある

レギュラー格子



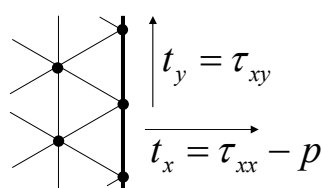
スタガード格子



- 有限要素法

- ✓ ノイマン条件を自然境界条件と呼び、境界面に作用する力（トラクション）を規定する
- ✓ 自然境界条件は基礎方程式中に自動的に組み込まれ、境界上まで基礎方程式が解かれる
注）トラクションが規定された近似解

境界面



• 境界条件に対する特長の比較

	有限差分法 有限体積法 粒子法	有限要素法
設定	困難	容易
自由度	高い	低い
条件の変更	容易	困難

非圧縮性流れの基礎方程式

• 流れの基礎方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{連続の式} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \text{ナビエ・ストークス (NS) 方程式} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \end{array} \right.$$

圧力の非定常項（時間微分項）が存在しないので
圧力を時間発展させるのが困難

そこで・・・ $\frac{\partial p}{\partial t} = ?$

NS方程式を微分し、連続の式と連立すると
ポアソン方程式が得られる

- 分離型解法における基礎方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NS方程式} \\ \text{ポアソン方程式} \\ \nabla^2 p = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{\Delta t} - \nabla \cdot \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \end{array} \right.$$

- 速度 ← NS方程式から求める
- 圧力 ← ポアソン方程式から求める ← 分離型

ポアソン方程式を解くには、圧力の境界条件が必要

非圧縮性流れの境界条件

壁境界

- 滑り壁条件・面対象条件

$$\mathbf{v}_N = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial n_B} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n_B} = 0$$

$\mathbf{v}_N$: 壁面法線方向速度

$\mathbf{v}_T$: 壁面接線 //

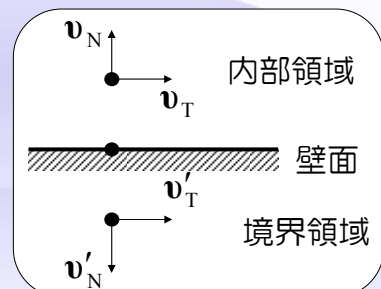
n_B : 壁面法線方向

差分法では壁面内に仮想点を設け、壁面上まで計算すると精度が向上

$$\mathbf{v}'_N = -\mathbf{v}_N, \quad \mathbf{v}'_T = \mathbf{v}_T \\ p' = p$$

$\mathbf{v}'_N, \mathbf{v}'_T, p'$: 境界領域の値

$\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_T, p$: 内部領域の値



壁境界

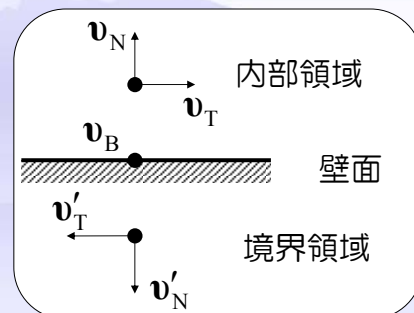
- 滑り無し条件（固体壁条件）

$$\mathbf{v}_N = 0, \quad \mathbf{v}_T = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n_B} = 0$$

仮想点を用いた計算

$$\mathbf{v}'_N = -\mathbf{v}_N, \quad \mathbf{v}'_T = -\mathbf{v}_T$$
$$p' = p, \quad (\mathbf{v}_B = 0)$$

$\mathbf{v}_B$: 壁面上の速度



壁境界の私見

壁面内に仮想点を用いることにより、精度が向上

- 面対称境界

物理量勾配が小さいため、定義点が粗

⇒ 仮想点を用いた計算が有効

- 物体表面境界

✓ 境界が折れ曲がっていることが多く、仮想点の設定が困難

✓ 物理量勾配が大きいいため定義点が集中

⇒ 仮想点を使用しない計算がお勧め

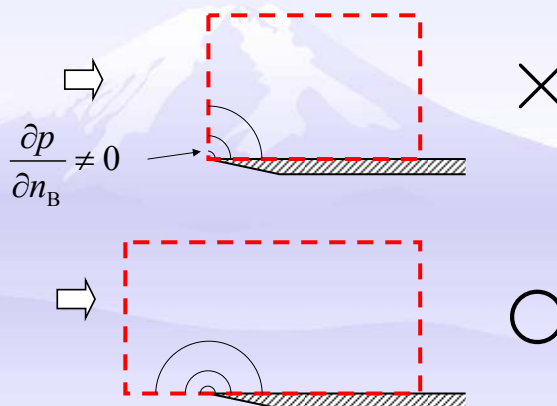
流入境界

- 速度、（温度）→ ディリクレ条件
対流する物理量の値を規定すると計算が安定
- 圧力 → ノイマン条件
 - ✓ 解法にもよるが、速度を規定した境界で圧力も規定すると、流れの連続性が保たれない
 - ✓ 境界において、境界法線方向に流れの加減速がないと仮定

$$\frac{\partial p}{\partial n_B} = 0 \quad n_B: \text{境界法線方向}$$

圧力勾配が予想される面に境界を設けるのは避けましょう

例) 平板境界層の発達問題



流出境界

- 速度、（温度）→ ノイマン条件

対流する物理量に対し、対流の性質に矛盾しない条件を与える

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_v} = 0 \quad n_v: \text{対流方向} (\mathbf{v})$$

境界面で分布変化の小さい（一様）場合は法線方向で評価しても誤差は小さい

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_B} = 0 \quad n_B: \text{境界法線方向}$$

差分法では、条件設定が容易になるように定義点を配置しておきましょう

つづき（流出境界）

- 圧力 → ディリクレ条件、ノイマン条件
どちらも適用可

- ✓ ディリクレ条件

設定は容易だが、分布が既知である必要がある

- ✓ ノイマン条件

境界において、境界法線方向に流れの加減速がないと仮定

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_B} = 0$$

注）平均値を固定する等、条件の追加が必要

流入・流出境界条件の私見

- ディリクレ条件

- ✓ 分布が既知である場所に境界を設けておく
- ✓ 境界値を求めるための予備計算も有用

- ノイマンン条件

- ✓ 境界における流れの仮定が満たされる場所に境界を設けておく
- ✓ 微分係数が既知の場合は、それを条件として利用する

例) 平板チャネル流れ

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.} \quad x: \text{チャネル長手方向}$$

バックステップ流れの計算例

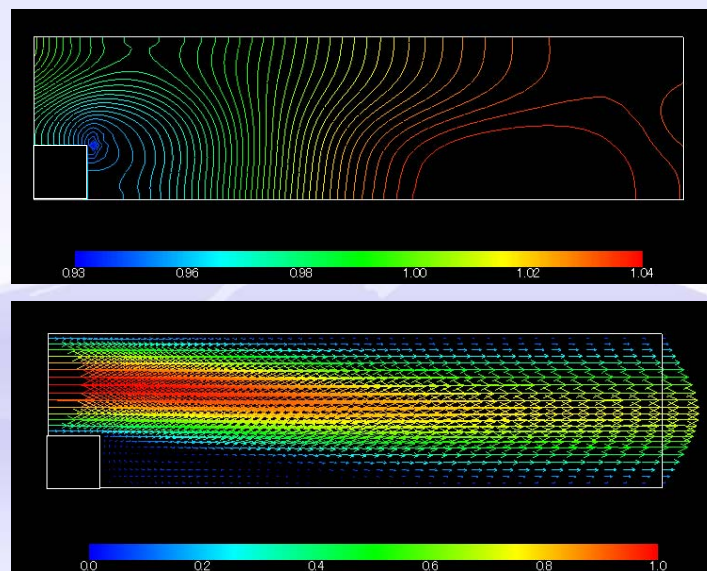
$Re = 100$



- 正しい条件

- ✓ 流入境界 速度：固定、 圧力：勾配 0
- ✓ 流出境界 速度：勾配 0、 圧力：勾配 0
- ✓ 圧力の平均値を 1 で固定

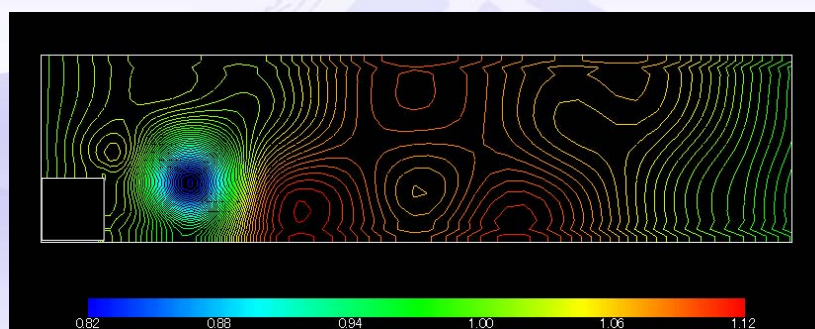
正しい条件での結果



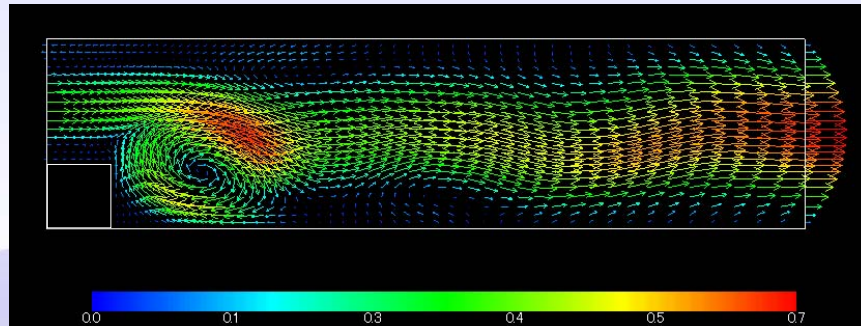
流入境界の失敗例

• 境界条件

- ✓ 流入境界 速度：勾配 0、 圧力：固定
- ✓ 流出境界 速度：固定、 圧力：勾配 0



流入境界の失敗例

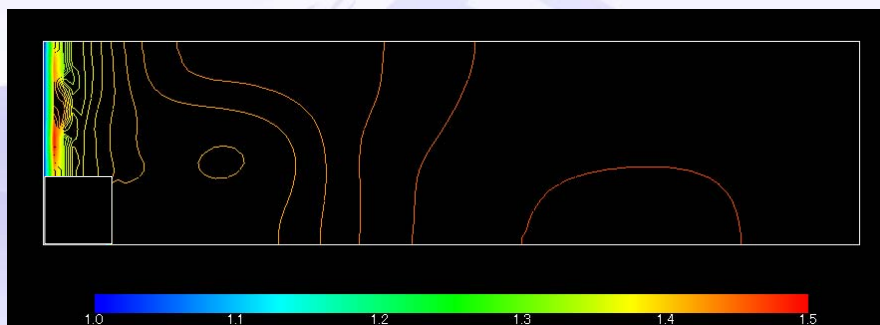


極端な加減速を繰り返し、解が安定しない

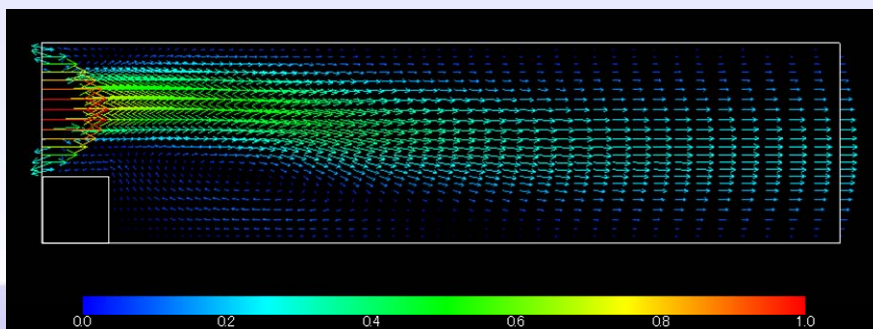
流入境界の失敗例

• 境界条件

- ✓ 流入境界 速度：固定、 圧力：固定
- ✓ 流出境界 速度：勾配 0、 圧力：勾配 0



流入境界の失敗例

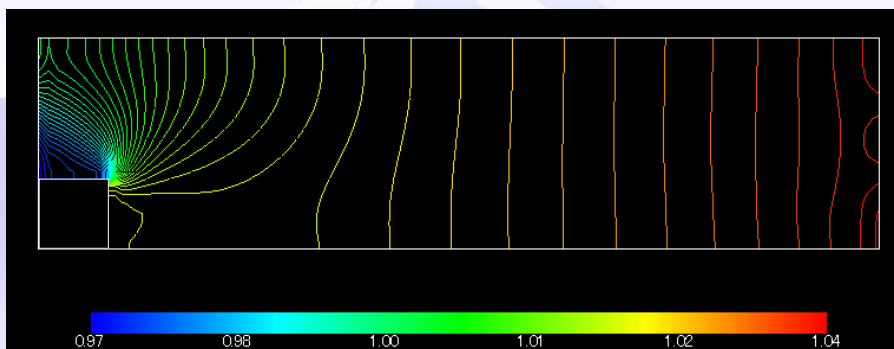


左向きの流れが次第に強くなり、最終的に発散
↓
流入で固定した圧力が全く反映されていない

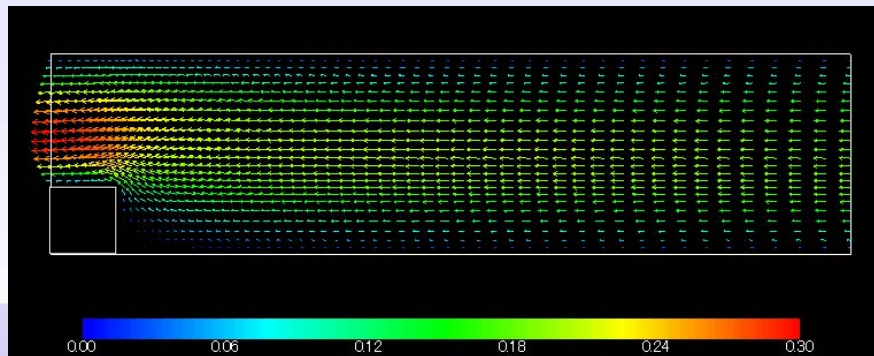
流入境界の失敗例

• 境界条件

- ✓ 流入境界 速度：勾配 0、圧力：固定
- ✓ 流出境界 速度：勾配 0、圧力：固定



流入境界の失敗？例



逆に流れた状態で解が収束



圧力差による解は1つではないことが判明

遠方境界

- 計算領域が十分大きくとれる場合

- ✓ 仮想点を用いない面对称条件

$$\mathbf{v}_N = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial n_B} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n_B} = 0$$

$\mathbf{v}_N$: 壁面法線方向速度 $\mathbf{v}_T$: 壁面接線 //

- ✓ 流出境界型の条件

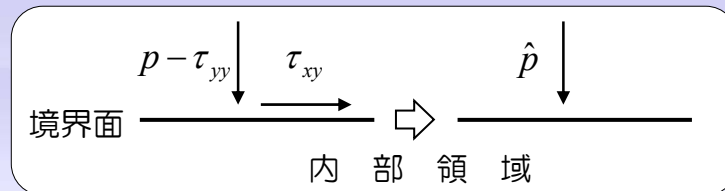
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_B} = 0, \quad p = \hat{p} \quad \hat{p}: \text{圧力の規定値}$$

注) 流出境界で圧力の値を規定している場合は $\hat{p}$ を流出境界と一致させる

つづき（遠方境界）

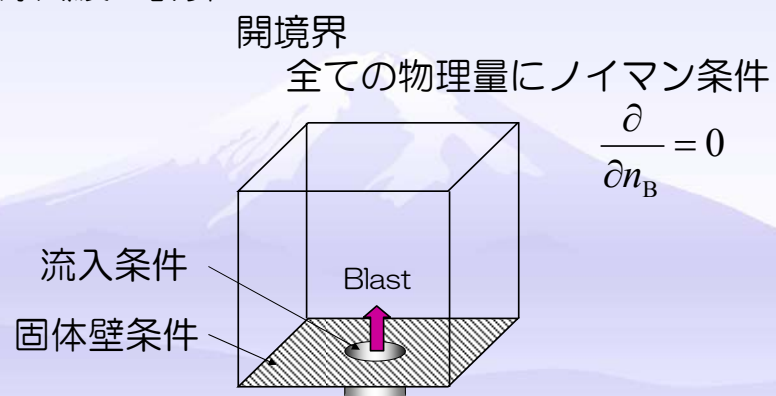
- トラクション条件：境界表面に作用する応力を規定
 - ✓ 圧力は、無限遠方で仮定される値で規定
 - ✓ 応力テンソルの値を 0 で規定

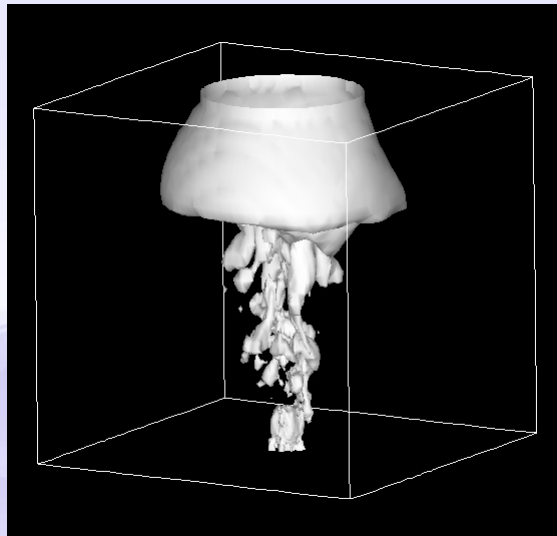
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad p = \hat{p} \quad \begin{array}{l} u: x \text{ 方向速度成分} \\ v: y \text{ 方向} \quad // \end{array}$$



単純な条件で比較的良好な結果が得られた例

- 爆風波の計算





圧力の等値面分布

遠方境界の私見

- 計算領域を十分大きくとると、条件設定が容易
- トラクション条件
 - ✓ 有限要素法では設定が容易
 - ✓ 差分法では、デカルト座標軸に垂直ではない境界においてトラクション条件の設定は煩雑
 - ✓ たとえトラクション条件を適用しても、厳密性はさほど高くない

計算領域を大きく取って、安易な境界条件がお勧め

周期境界

ここが最も重要

前もって、対応する境界の定義点配置を等しくしておく

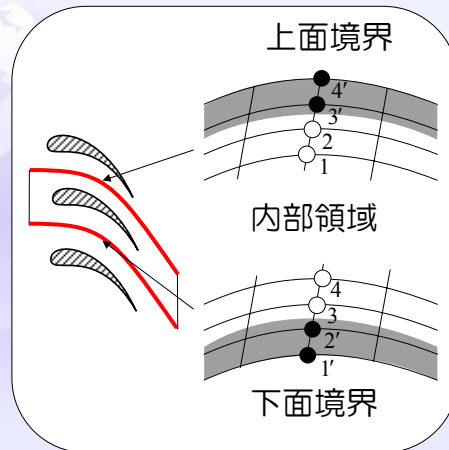
• 上下周期条件

対応する内部領域の物理量を境界に与える

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad p' = p$$

$\mathbf{v}', p'$: 境界領域の物理量

$\mathbf{v}, p$: 対応している内部領域の物理量

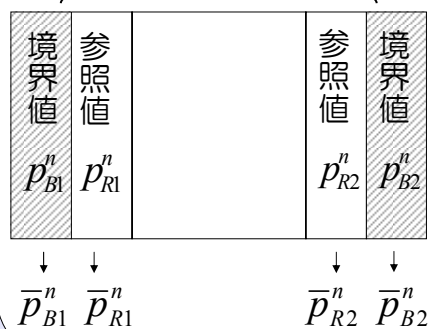


周期境界

• 流入・流出周期条件

ステップ1

内部領域



ステップ2

$$p_{B1}^{n+1} = p_{R2}^n + (\bar{p}_{R1}^n - \bar{p}_{B2}^n)$$



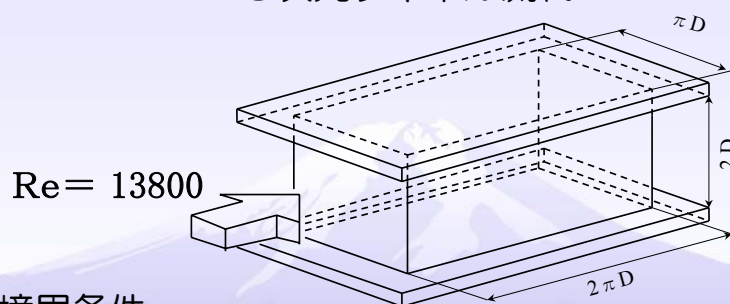
$$p_{B2}^{n+1} = p_{R1}^n + (\bar{p}_{R2}^n - \bar{p}_{B1}^n)$$

周期境界の私見

- 流入・流出境界への適用には、圧力の扱いに注意が必要
- 周期条件の導入によって、全ての境界でノイマン条件になってしまった物理量には、平均値を規定する等の条件の付加が必要
- 開境界が排除されるのは画期的
- 計算領域を不必要大きく取る必要がないので計算の高速化に寄与

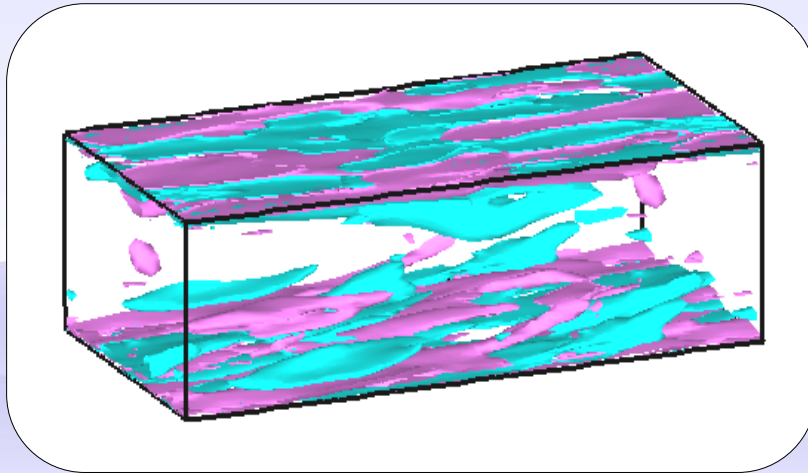
流れに周期性があるなら、積極的に導入しましょう

周期条件の適用例 ～3次元チャネル流れ～

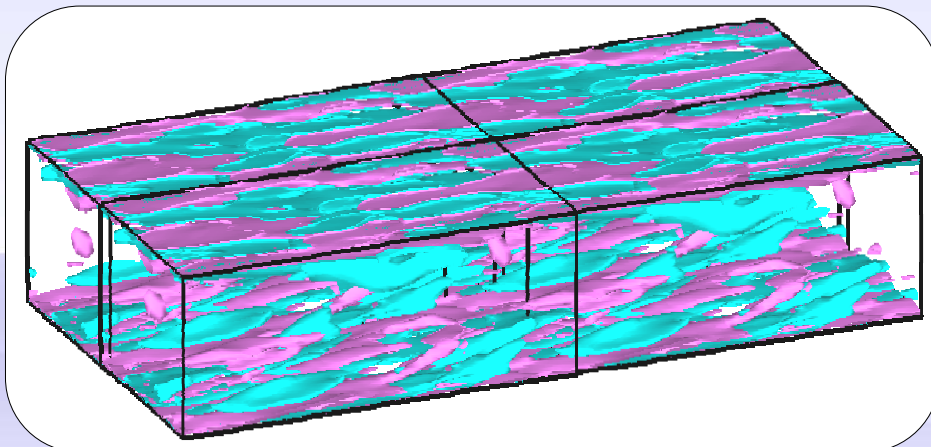


- 境界条件
 - 流入: 周期境界条件 + 流量を固定
 - 流出: 周期境界条件 + 圧力の平均値を固定
 - 壁面: 滑り無し壁
 - スパン方向: 完全周期境界条件

- 渦度等値面



- 合 体



失 敗 談

- 流入: 周期境界条件 + 流量を固定

流量を固定しなかった場合

時間とともに減速し、最終的には流れが止まってしまった

- 流出: 周期境界条件 + 圧力の平均値を固定

圧力の平均値を固定しなかった場合

場全体の圧力が徐々に上昇し、最終的には発散してしまった

乱 流 解 析

- DNS : 非定常な乱流の諸現象を直接解く
- LES : 格子スケールよりも大きい渦は直接解き、小さい渦はモデル化

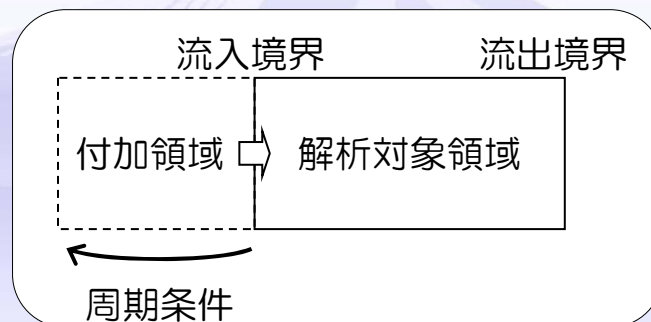
上記2つは非定常解析 ⇒ 開境界に対して高精の向上が望まれる

- RANS : 乱流の効果をモデル化し、時間平均された定常な物理量分布を求める

乱れの諸量に対する輸送方程式が追加
→ これらの境界条件も必要

非定常な流入境界

- 解析対象領域の上流側に付加的な領域を設け、付加領域で周期計算を実行することにより得られた非定常分布を流入境界に使用



非定常な流出境界

- 対流境界条件

境界上で対流方程式を解く

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u_c \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} = 0$$

x_n : 境界法線方向
 u_c : x_n 方向対流速度



$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{u_c \Delta t}{\Delta x_n} (\mathbf{v}_i^n - \mathbf{v}_{i-1}^n)$$

$\mathbf{v}_i$: 境界上の速度ベクトル

u_c の決定法

- ✓ 境界面の最大、最小流速の平均値
- ✓ 境界面内で一様に与える

LESにおける固体壁境界条件

壁面に隣接する定義点の速度には壁法則を利用

2層モデル

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & (y^+ \leq y_c^+) \\ u^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ - 5.5 & (y^+ > y_c^+) \end{cases} \quad \kappa : \text{カルマン定数} (=1.4)$$

スポルディング則

$$u^+ = y^+ + e^{-5.5\kappa} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right]$$

ただし

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad u_\tau : \text{壁面摩擦速度}$$

壁法則の適用法

① 2層モデル、またはスポルディング則

$$\begin{array}{c} + \\ \text{壁面隣接点上の } u_\tau \text{ と } y_n \\ \downarrow \\ u_\tau \end{array} \quad \begin{array}{l} u_\tau : \text{壁面接線方向速度} \\ y_n : \text{壁面からの距離} \end{array}$$

② 壁面せん断応力 τ_w を求める

$$\tau_w = \rho u_\tau^2$$

③ τ_w を用いて基礎方程式を解く

RANSにおける境界条件

- RANSの代表的モデル → $k-\varepsilon$ モデル

乱流運動エネルギー k とその散逸率 ε を
輸送方程式より求める



境界条件が必要

乱流諸量の輸送方程式は、対流拡散型なので
壁面以外は温度や速度の境界条件と同じ

$k-\varepsilon$ モデルの固体壁境界条件

- 高レイノルズ数型モデル → 壁法則を使用

壁面隣接点 ($20 < y^+ < 300$): $k = u_\tau^2 / \sqrt{C_\mu}$, $\varepsilon = u_\tau^3 / \kappa y$
 C_μ : モデル定数

壁面上の点: $\frac{\partial k}{\partial n_B} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_B} = 0$

- 低レイノルズ数型モデル
→ 壁面隣接点まで輸送方程式を解く

$k = 0$

ε は提案者によって、規定条件が異なる

圧縮性流れの基礎方程式

質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

運動量保存

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j e + p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

エネルギー保存

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial ((\rho e + p) u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j})$$

圧縮性流れの解析

- 圧縮性流れの計算変数

$$\rho, \quad \rho \mathbf{v}, \quad \rho e$$

ρ : 密度

e : 全エネルギー

基本物理量の従属変数

ただし
$$e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{RT}{\gamma - 1} \quad \gamma: \text{比熱比}$$

- 全ての基礎方程式は対流・拡散型



- ✓ 解法が単純
- ✓ 開境界に対する考え方が明確

圧縮性流れの情報伝播

- 流れ場中を伝わっている情報は計算変数ではない
- 計算変数と同じ数の特性量がそれぞれの特性速度で伝播している

1次元流れでは3つの特性量が3つの特性速度で伝播している

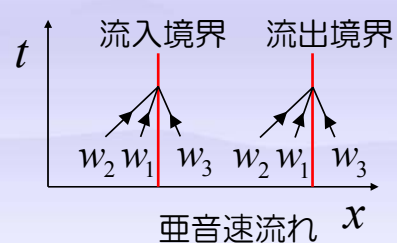
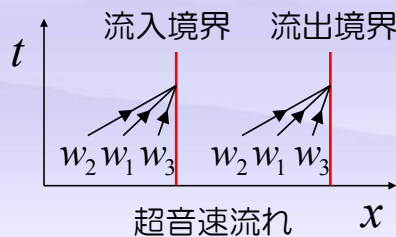
特性量	特性速度
w_1	$\longrightarrow u$
w_2	$\longrightarrow u + a$
w_3	$\longrightarrow u - a$

a : 音速
 u : 流れの速度

圧縮性流れの情報伝播

- $u > a$ の場合 → 超音速流れ
3つの特性速度が正
- $u < a$ の場合 → 亜音速流れ
2つの特性速度が正
1つ // が負

特性量	特性速度
w_1	$\longrightarrow u$
w_2	$\longrightarrow u + a$
w_3	$\longrightarrow u - a$



圧縮性流れの流入・流出境界

超音速流れ ($|\nu_n| > a$) ν_n : 境界法線方向速度

流入境界: 全ての量をディリクレ条件

流出境界: 全ての量をノイマン条件

亜音速流れ ($|\nu_n| < a$)

流入境界: 1つの量をノイマン条件

残りの量をディリクレ条件

流出境界: 1つの量をディリクレ条件

残りの量をノイマン条件

- 「量」とは、基本物理量でも計算変数でも選択可
- 流出境界では、圧力か密度の値を規定するのが一般的

圧縮性流れの遠方境界

- リーマン条件: 遠方から伝播する特性量を利用

流れをエントロピと仮定すると特性量が定まる

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{遠方} \rightarrow \text{境界: } w_3 = \nu_n - \frac{2a}{\gamma-1} \\ \quad \text{遠方での値を予め仮定しておく} \\ \text{内部領域} \rightarrow \text{境界: } w_2 = \nu_n + \frac{2a}{\gamma-1} \\ \quad \text{境界隣接点より導出} \end{array} \right.$$

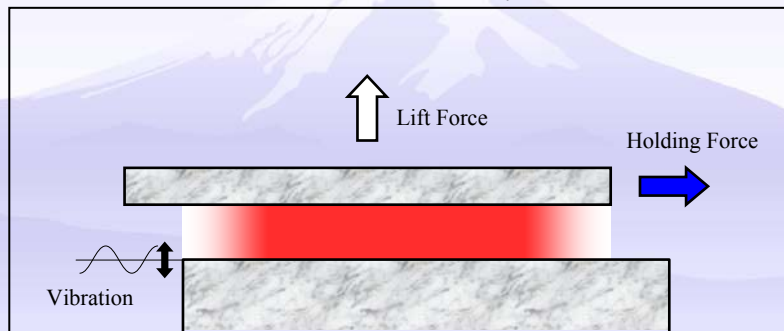
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu_n = (w_2 + w_3)/2 \\ a = \frac{\gamma-1}{4}(w_2 - w_3) \end{array} \right.$$

境界の法線方向速度 ν_n と音速 a が求まる

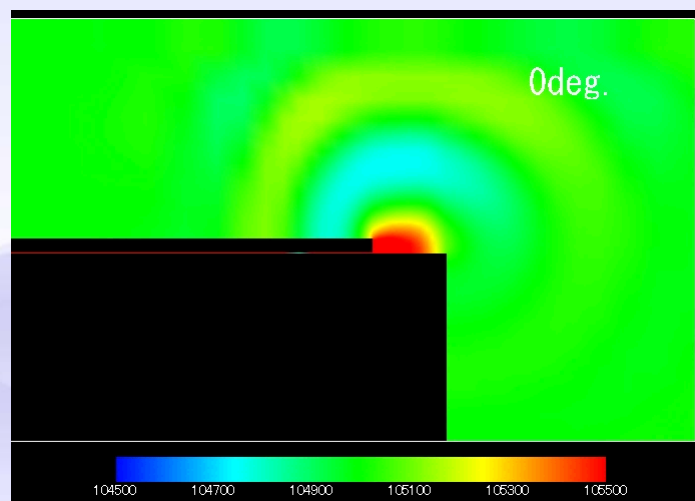
リーマン境界条件の適用例

•スクイーズフィルム内流れの計算

リーマン条件を適用



リーマン境界条件の適用例



失敗談

- 開境界で全ての物理量にノイマン条件を適用



徐々に計算場全体の温度が上り、最終的に発散

- そこで・・・ 開境界で圧力を固定



温度上昇はなくなったが、境界で不自然な反射波

- そこで・・・ リーマン条件の適用 → \(\wedge^o\wedge\)

圧縮性流れの固体壁境界

- 速度や圧力は非圧縮性の条件と同じ

$$\mathbf{v}_B = 0, \quad \partial p / \partial n_B = 0$$

- 温度の条件

✓ 等温壁条件: $T_B = \hat{T}$ $\hat{T}$: 温度の規定値

✓ 断熱壁条件: $\partial T / \partial n_B = 0$

上記より求まった壁面上の圧力と温度から
密度を与える

$$\rho_B = p_B / (RT_B) \quad R: \text{ガス定数}$$

ま と め

- 境界条件の設定が容易になるような計算領域を前もって考えておくべき
- 開境界に対して、厳密な境界条件は存在しない
- 着目している場所を開境界から遠ざけておき、境界付近は計算結果から除外して考える
- まずは基本的な境界条件を設定し、境界上で不自然な分布が得られた場合に、高精度な条件設定を試みることをお勧めする