離散化手法とスキームの基礎と選択法

2007/1/16

宇宙航空研究開発機構
情報・計算工学センター
嶋英志

本講習の目的

- 基礎的な計算法の性質を述べ、各手法の持つ長所短所を理解することによって、手法の背景を理解した正しい選択に近づくこと
- 「クーラン数」「風上差分」等の広い範囲のCFD技術に共通の概念について、その意味とイメージを把握すること

本講習の方針

- 様々な流体方程式の基礎となる移流方程式を用いて色々な計算法の特徴を計算例を示しながら解説する
- 上記については十分理解できるように丁寧に説明する
- 圧縮性と非圧縮性、差分法と有限体積法と有限要素法、各々で扱いの違う非線形性や多次元の扱いは省略する

目次

- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法
- その他の手法

目次

- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

流体の方程式と移流方程式

一次元線形移流方程式（OLCE)

$$q_t + a q_x = 0 \qquad q = f(x - at)$$

一次元圧縮性Euler方程式

$$Q_t + E_x = 0$$

係数行列の直行分解

$$q_{k\,t} + a_k q_{k\,x} = 0$$

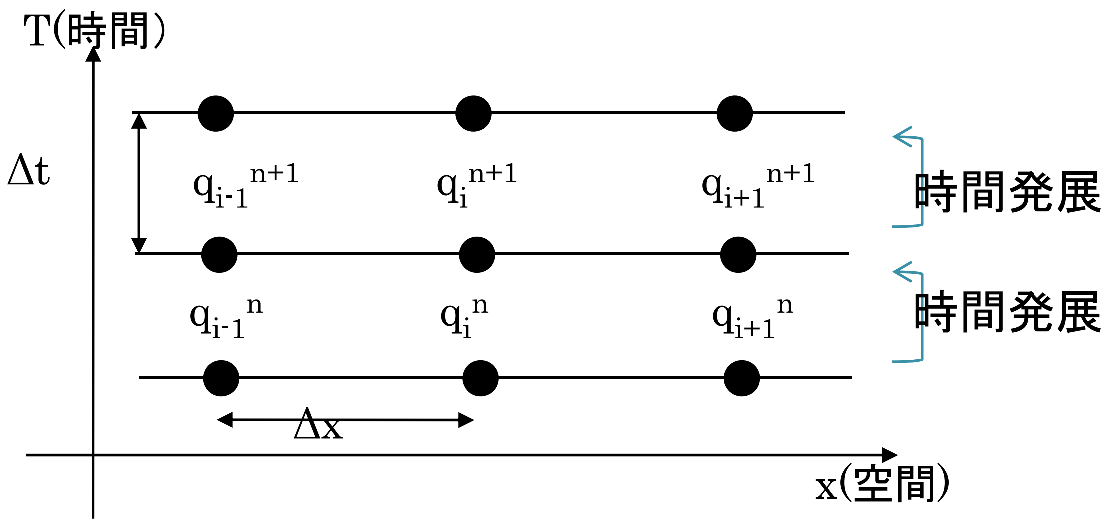
二次元(非圧縮）NS方程式

$$\underline{u_t} + \underline{u u_x} + \underline{v u_y} - \frac{1}{\rho} p_x = + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta u$$

高レイノルズ数では小

移流方程式の離散化（1）

- 時空間の離散化



$$q(n\Delta t, i\Delta x) = q_i^{\ n}$$

- 微分項の差分近似

$$q_x \approx \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta x} \qquad q_t \approx \frac{q^{n+1}{}_i - q^n{}_i}{\Delta t}$$

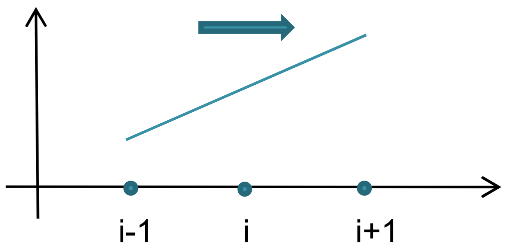
移流方程式の離散化（2）

- **微分方程式の離散化**
  - 空間中心差分+Euler陽解法

$$\frac{q_{i+1}-q_{i-1}}{2\Delta x}=q_x+\frac{\Delta x^2}{6}q_{xxx}+O(\Delta x^4)$$ ：二次精度

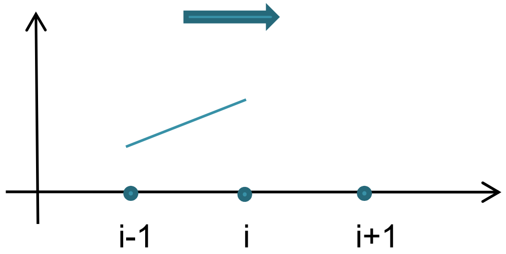
$$q_i^{n+1}=q_i^n-\lambda\frac{q_{i+1}^n-q_{i-1}^n}{2}$$

$$\lambda=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$$ ：Courant数



移流方程式の離散化（３）

- 微分方程式の離散化
  - 空間風上差分+Euler陽解法



$$\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta x} = q_x - \frac{\Delta x}{2} q_{xx} + O(\Delta x^2)$$ ：一次精度

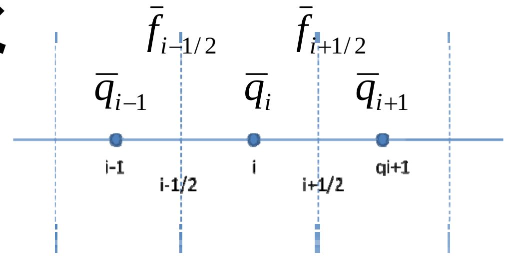
$$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda\left(q_i^n - q_{i-1}^n\right)$$

$$a\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta x} = a\frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta x} - |a|\frac{q_{i+1} - 2q_{i-1} + q_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2} + |\lambda|\frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{2}$$

移流方程式の離散化（3）

- **有限体積法と差分法の比較**



時空間で積分　$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}(q_t + aq_x)dxdt = 0$

平均が正確なら下式は厳密

$$\frac{1}{\Delta t}(\bar{q}_i^{\,n+1} - \bar{q}_i^{\,n}) + \frac{1}{\Delta x}(\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}) = 0$$

$$\bar{q} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q dx \qquad \bar{f} = \frac{1}{\Delta t}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} aqdt$$

$\bar{f}$の近似次第で様々なスキームが定義可能

$$\bar{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}a(\bar{q}_i^{\,n} + \bar{q}_{i+1}^{\,n}) \Rightarrow \bar{q}_i^{\,n+1} = \bar{q}_i^{\,n} - \lambda\frac{\bar{q}_{i+1}^{\,n} - \bar{q}_{i-1}^{\,n}}{2}$$

:中心差分

$$\bar{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left\{a(\bar{q}_i^{\,n} + \bar{q}_{i+1}^{\,n}) + |a|(\bar{q}_i^{\,n} - \bar{q}_{i+1}^{\,n})\right\} \Rightarrow \bar{q}_i^{\,n+1} = \bar{q}_i^{\,n} - \lambda(\bar{q}_i^{\,n} - \bar{q}_i^{\,n})$$

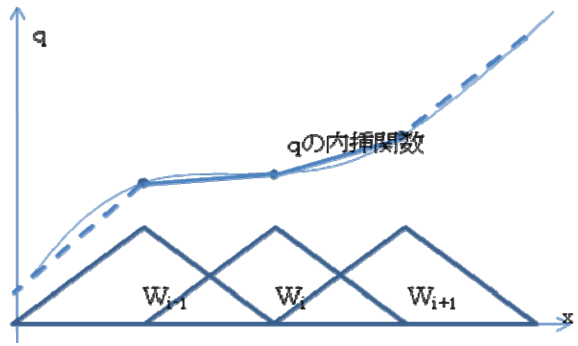
:風上差分

移流方程式の離散化（４）

- 有限要素法と差分法の比較

$$\int W_i(q_t + aq_x)dx = 0$$

この式は厳密。局所的にのみ値を持つ
W_iを用いて局所的性質を抽出する。



仮定１：頂点の間を線形補完(例)で近似

$$q = q_i N_i + q_{i+1} N_{i+1}$$

仮定２：W_iにN_iと同じものを使用=ガラーキン法

$$\frac{1}{6}\left((q_t)_{i-1} + 4(q_t)_i + (q_t)_{i+1}\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(q_{i+1} - q_{i-1}\right) = 0$$

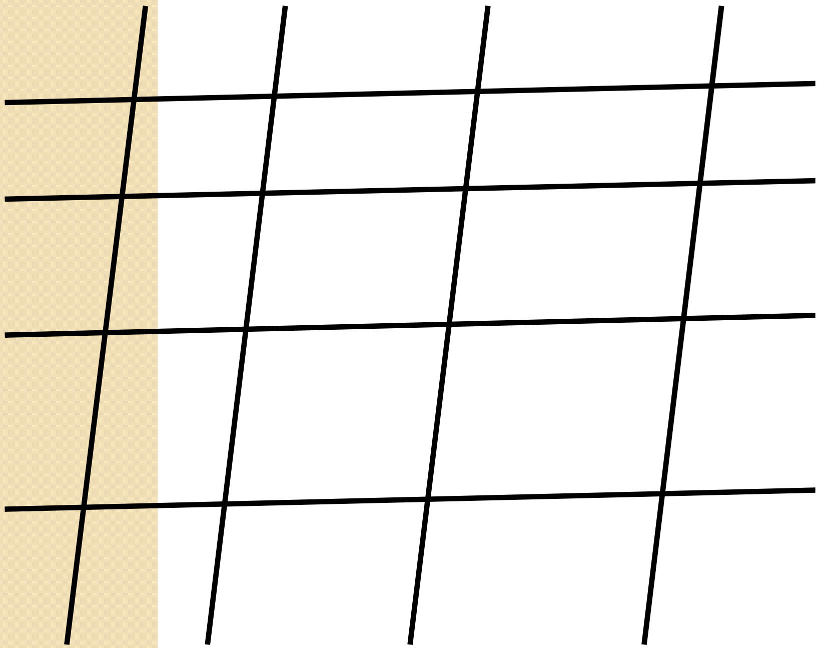
$$\frac{1}{6}\left((q_t)_{i-1} + 4(q_t)_i + (q_t)_{i+1}\right) \Rightarrow (q_t)_i$$ ：質量集中行列 $$q_t \approx \frac{q^{n+1}{}_i - q^n{}_i}{\Delta t}$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2}$$ ：中心差分と一致

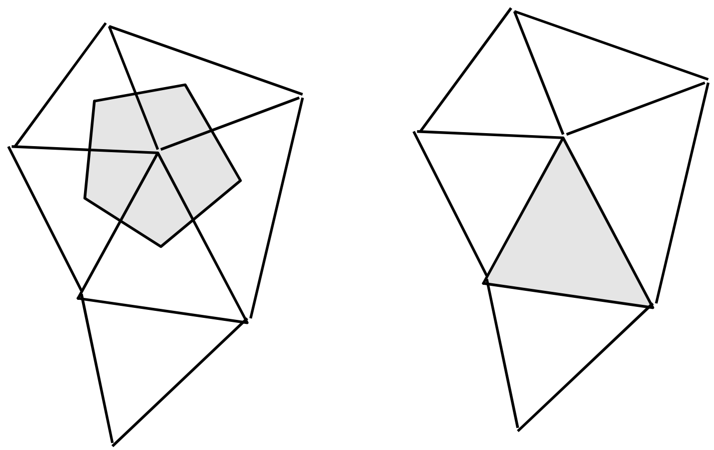
FDM,FEM,FVMの比較

- FEM、FVMのメリットは計算メッシュに対する柔軟性

差分法用の格子



FVM、FEM用の格子



基本的離散化のまとめ

- 一次元の簡単なスキームについては、差分法(FDM)、有限体積法(FVM)、有限要素法(FEM)は結局同じようなもの
- したがって、今後は原則的にFDMを用いて基礎的なスキームを説明する
- ただし、より洗練されたスキームでは相互の変換は一般には不可能
- FDM,FVM,FEM間で優れたスキームの相互移植は研究テーマになりうる

目次

- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

スキームの安定性(I)

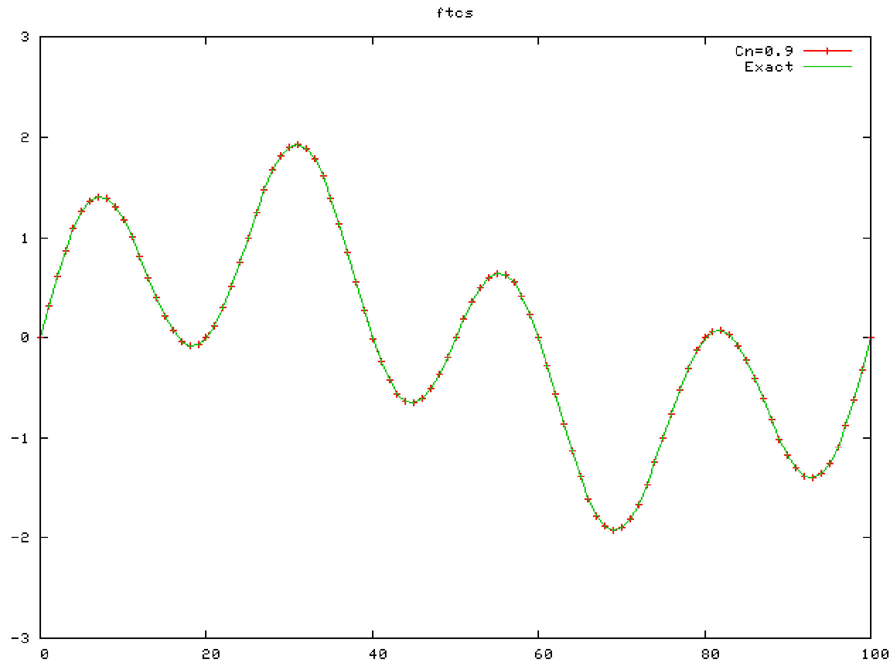
- 周期的2重サイン波の伝搬問題

中心差分+陽解法

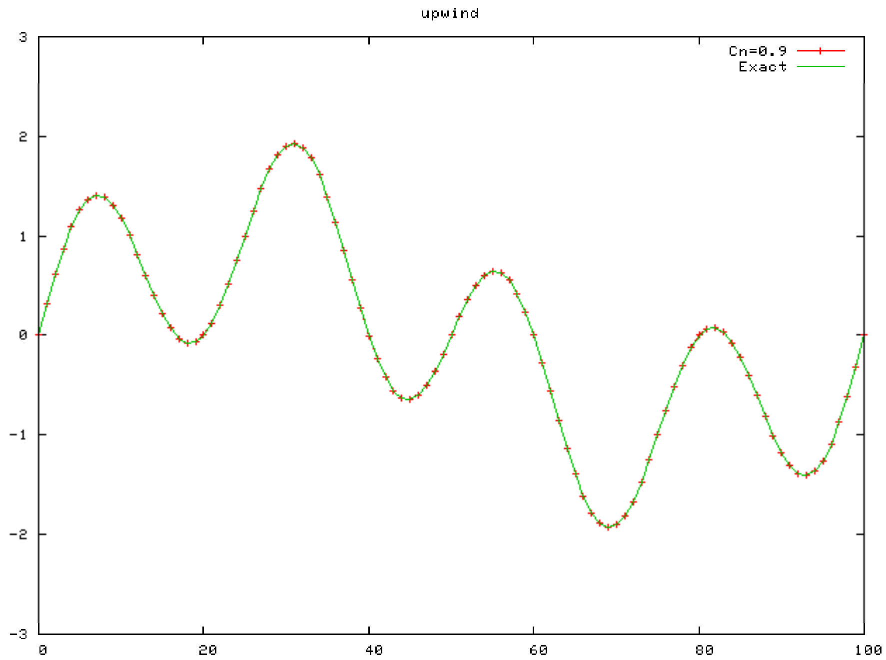
$$q_i^{n+1} = q_i^{\,n} - \lambda \frac{q_{i+1}^{\,n} - q_{i-1}^{\,n}}{2}$$

風上差分+陽解法

$$q_i^{n+1} = q_i^{\,n} - \lambda\left(q_i^{\,n} - q_{i-1}^{\,n}\right)$$

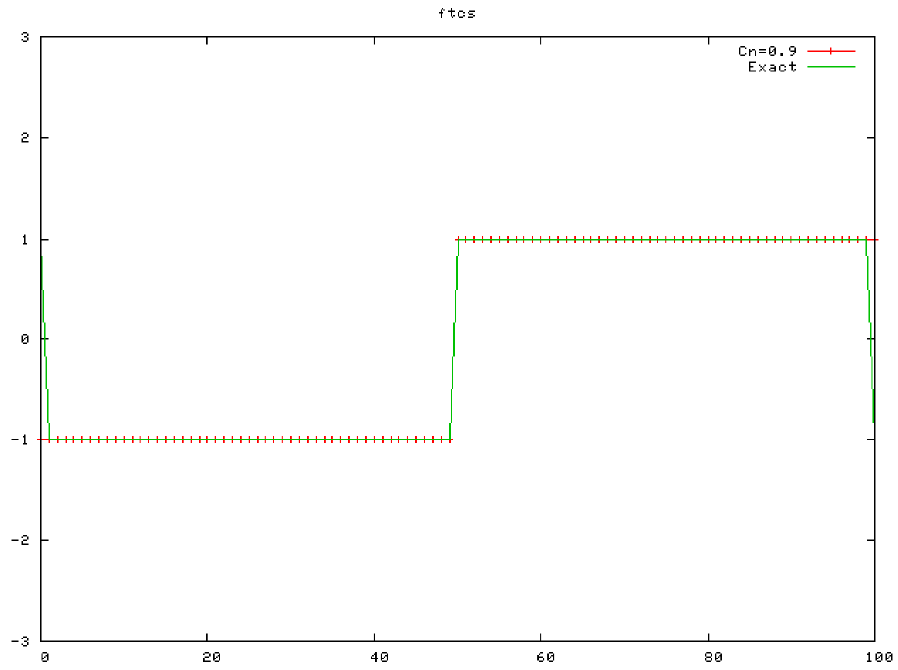


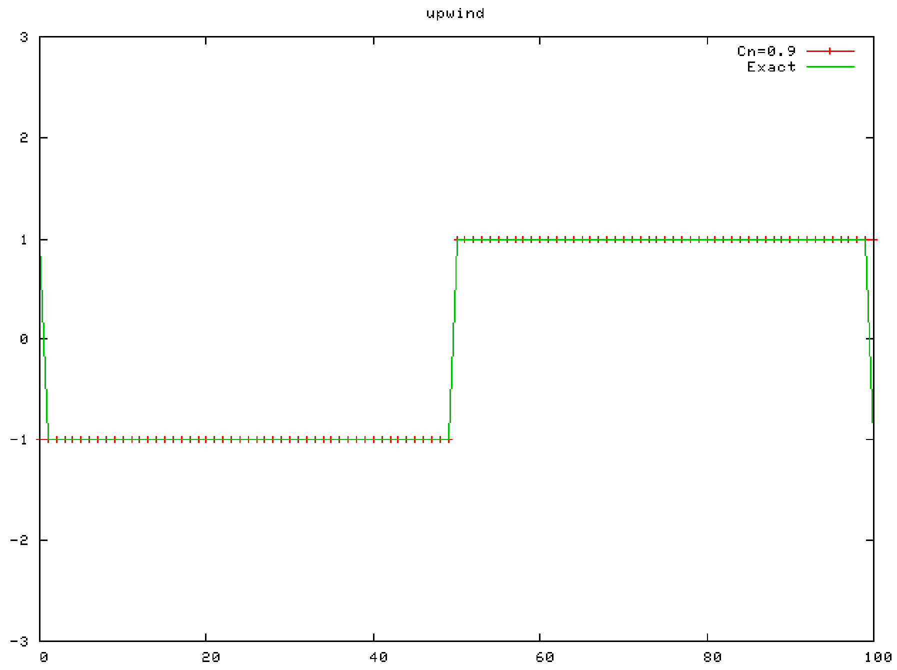
無条件不安定



条件安定

スキームの安定性(2)（矩形波）





中心差分+陽解法
:無条件不安定

風上差分+陽解法
:条件安定

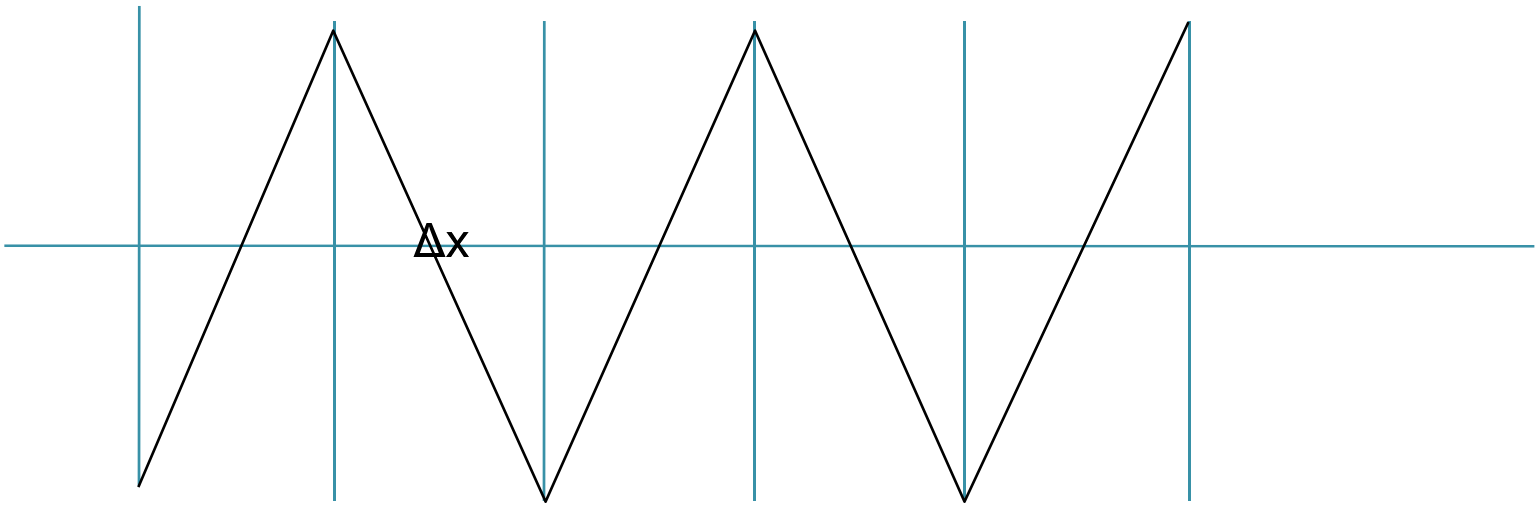
矩形波やステップは最高波数を含むので高波数の誤差が顕著にわかる

スキームの安定性(3)（安定性解析）

- フォン・ノイマンの安定性解析
  - サイン波の一つの波数に着目

$$q_i^n = \exp(jik\Delta x) \qquad j\text{:虚数単位}$$

  - k：波数　0≦k≦π
  - kΔx=πが扱える最高波数



スキームの安定性(3)（安定性解析）

- フォン・ノイマンの安定性解析

$$q_i^n = \exp(jik\Delta x)$$

  - 厳密解

$$q_i^{n+1} = A_{exact} q_i^n$$

$$A_{exact} = \exp(-jak\Delta t)$$

$$= \exp(-jk\lambda\Delta x) = \cos k\lambda\Delta x - j\sin k\lambda\Delta x$$

  - 差分近似の*A*(増幅係数)

中心差分+陽解法 $A_{c2} = 1 - j\lambda \sin k\Delta x$ 常に$|A_{C2}|>1$

風上差分+陽解法 $A_{u1} = 1 - \lambda(1-\cos k\Delta x) - j\lambda\sin k\Delta x$ $\lambda \leqq 1$で$|A_{U1}| \leqq 1$

増幅係数からわかる振幅誤差、位相誤差

- **厳密解の*A***

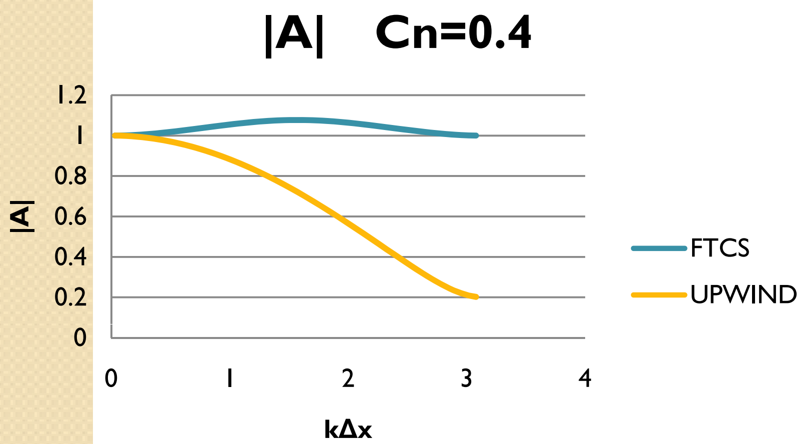
$$A_{exact} = \exp(-jk\lambda\Delta x) = r_{exact}\exp(j\theta_{exact})$$

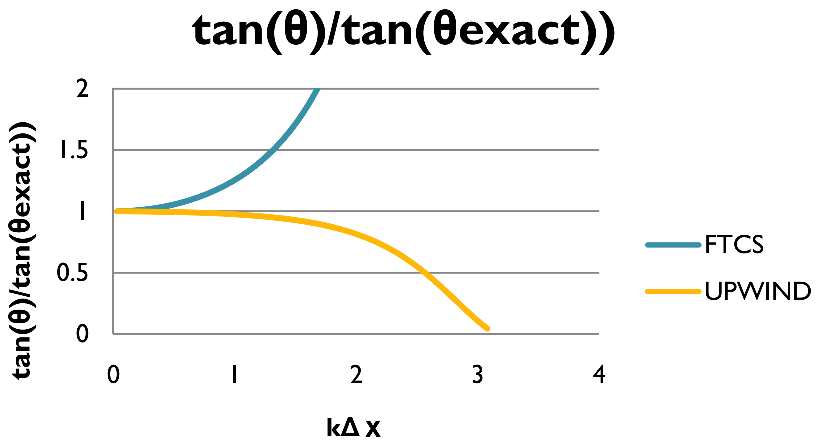
$$r_{exact} = 1 \qquad \tan(\theta_{exact}) = \tan(-k\lambda\Delta x)$$

- **差分近似の*A***

中心差分+陽解法 $$A_{c2} = 1 - j\lambda\sin k\Delta x$$

風上差分+陽解法 $$A_{u1} = 1 - \lambda(1-\cos k\Delta x) - j\lambda\sin k\Delta x$$





時間積分法の変更による中心差分の安定化

- 予測子-修正子法（時間一次精度）

$$\bar{q}_i = q_i^{\ n} - \lambda \frac{q_{i+1}^{\ \ n} - q_{i-1}^{\ \ n}}{2}$$

$$q_i^{\ n+1} = q_i^{\ n} - \lambda \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_{i-1}}{2}$$

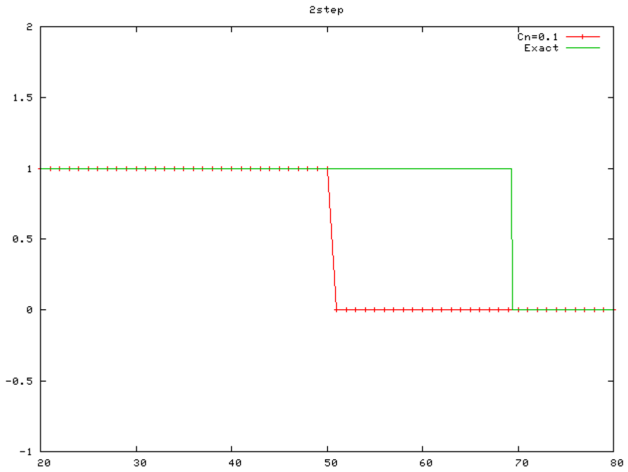
- 3段階ルンゲ・クッタ（時間三次精度）

$$\bar{q}_i = q_i^{\ n} - \frac{1}{3}\lambda \frac{q_{i+1}^{\ \ n} - q_{i-1}^{\ \ n}}{2}$$

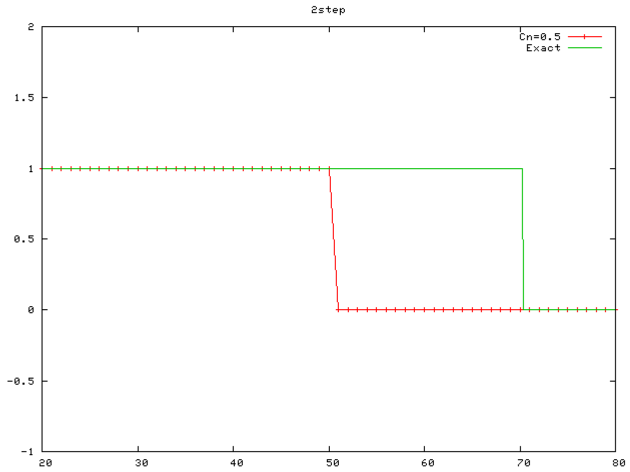
$$\bar{\bar{q}}_i = q_i^{\ n} - \frac{1}{2}\lambda \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_{i-1}}{2}$$

$$q_i^{\ n+1} = q_i^{\ n} - \lambda \frac{\bar{\bar{q}}_{i+1} - \bar{\bar{q}}_{i-1}}{2}$$

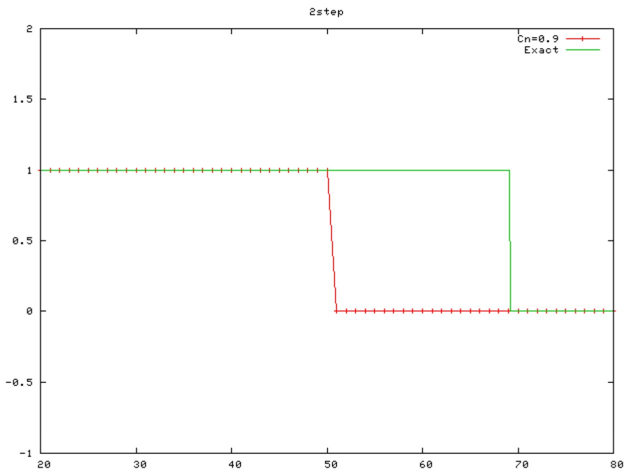
予測子-修正子法でのクーラン数の効果



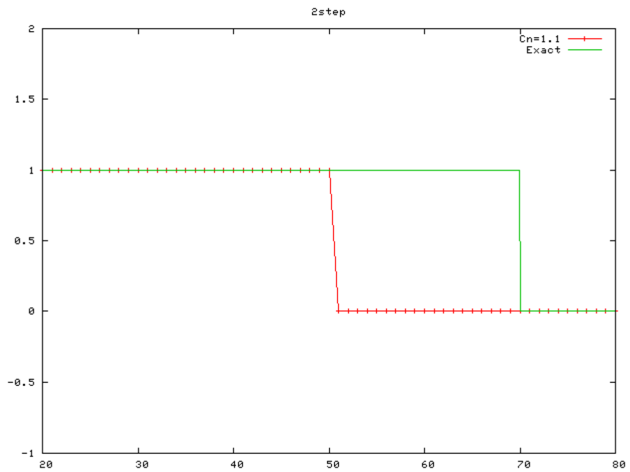
C_N=0.1



C_N=0.5

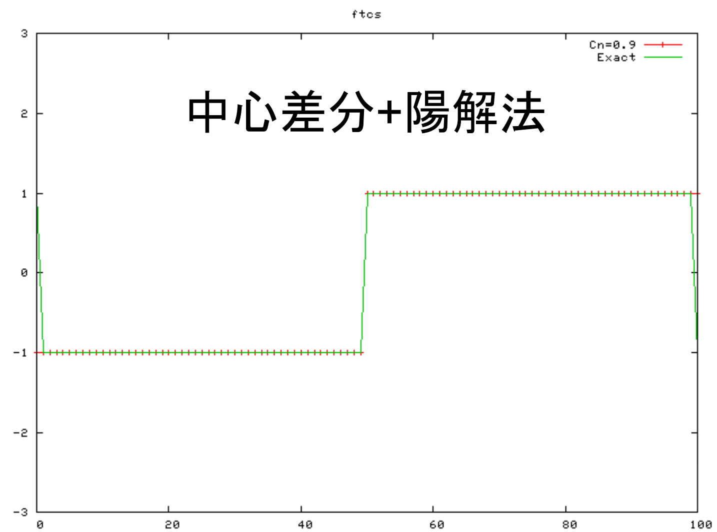


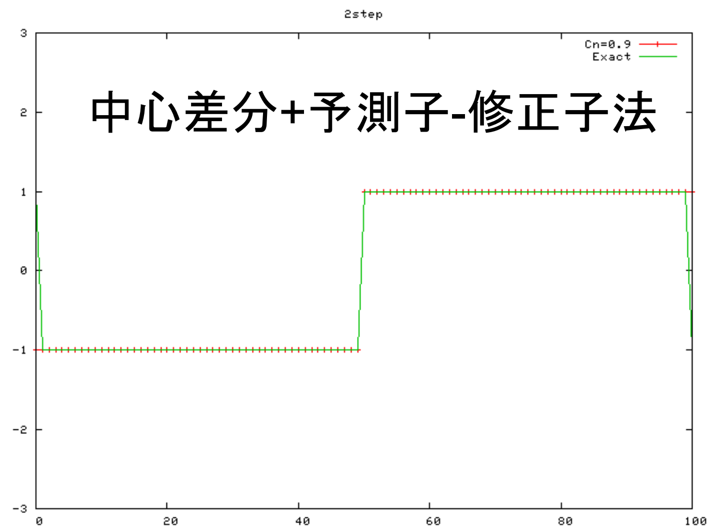
C_N=0.9

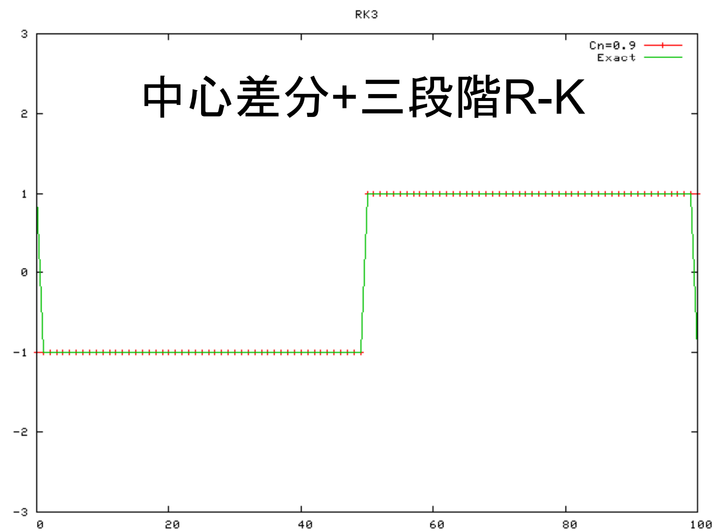


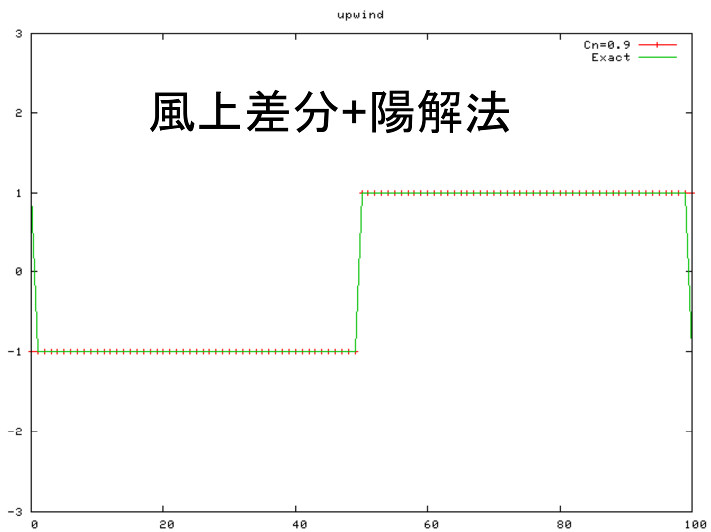
C_N=1.1

数値例：スキームによる矩形波伝搬の違い

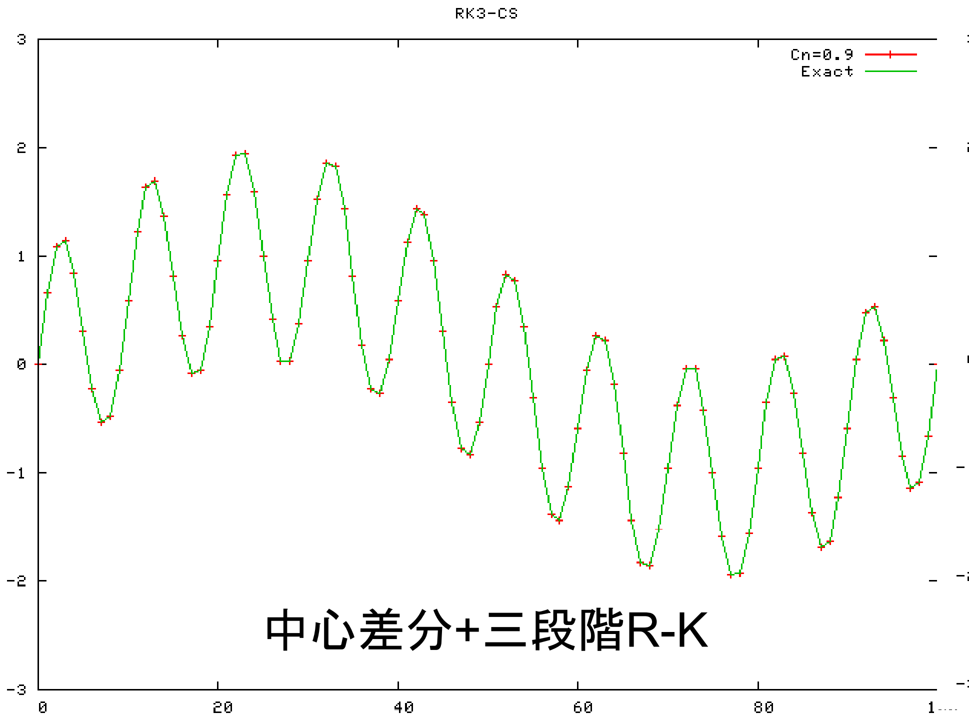


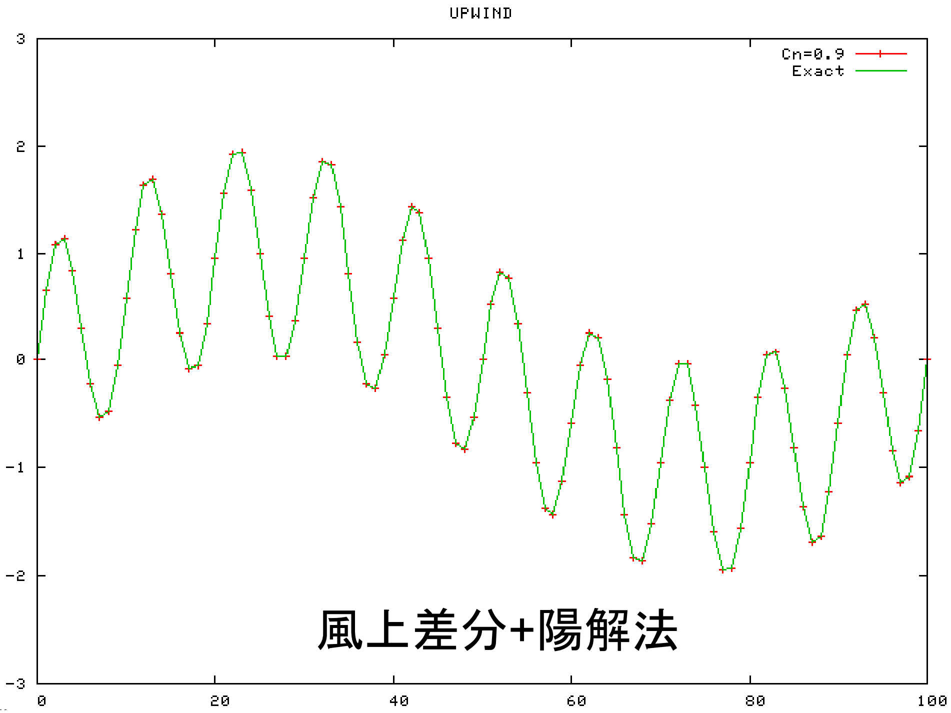






数値例：振幅誤差（散逸性）と位相誤差（分散性）





高波数で位相誤差が顕著

高波数で位相誤差もあるが
それより減衰が顕著

簡単なスキームからの改良方向

- クーラン数の制限を外したい
  - 陰解法
- 高波数まで正しく解きたい
  - ⇒高次精度法
- 振動を無くしたい
  - 波数による移送速度の違いが振動の原因
  - 正しくない波を消す必要がある
  - 現実の問題では振動により破綻することが少なくない
  - ⇒TVD、ENO、WENO、CIP

目次

- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

陰解法

- 中心差分+Euler陰解法

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda \frac{q_{i+1}^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}}{2}$$

$$\frac{\lambda}{2} q_{i+1}^{n+1} + q_i^{n+1} - \frac{\lambda}{2} q_{i-1}^{n+1} = q_i^n$$:連立一次方程式を解く

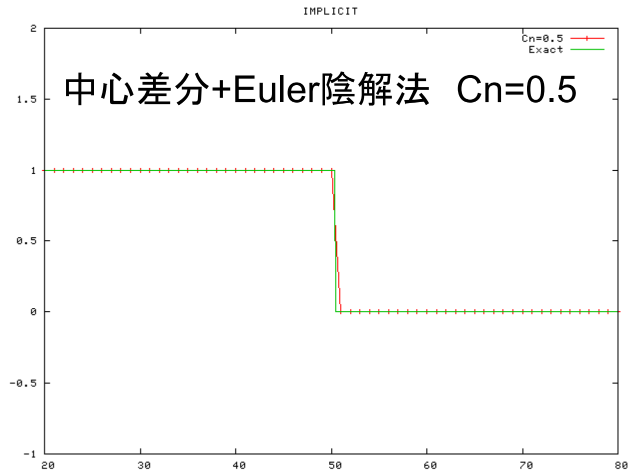
$$A = \frac{1}{1 + j\lambda \sin k\Delta x}$$:無条件安定

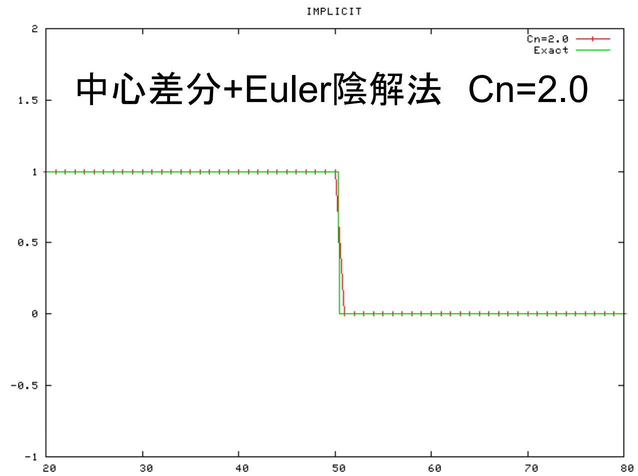
- クランク・ニコルソン（時間二次精度）

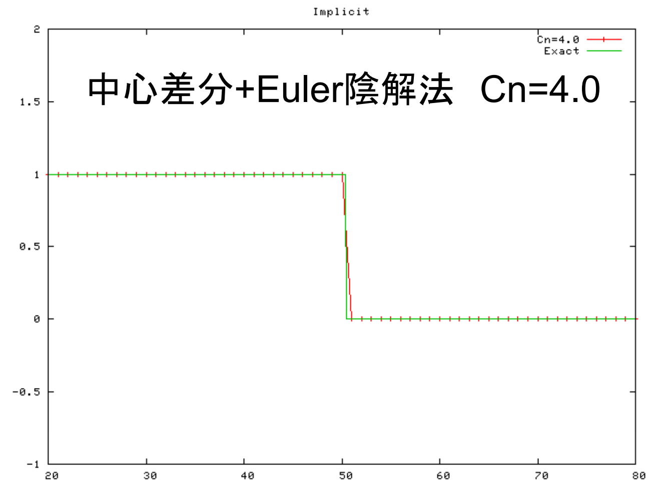
$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2} + \frac{q_{i+1}^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}}{2} \right)$$

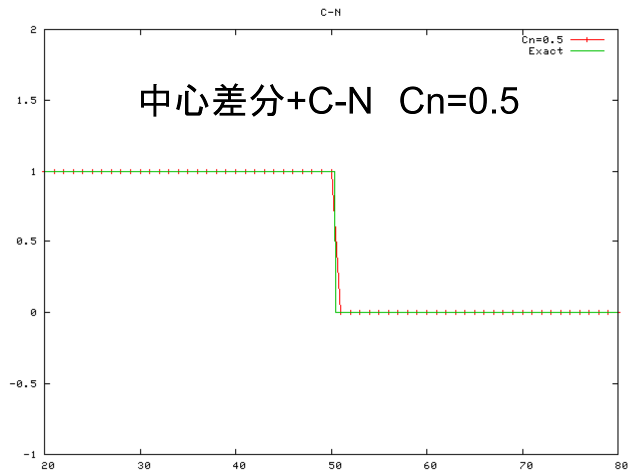
$$A = \frac{1 - \frac{1}{2} j\lambda \sin k\Delta x}{1 + \frac{1}{2} j\lambda \sin k\Delta x}$$:無条件安定（|A|≡1）

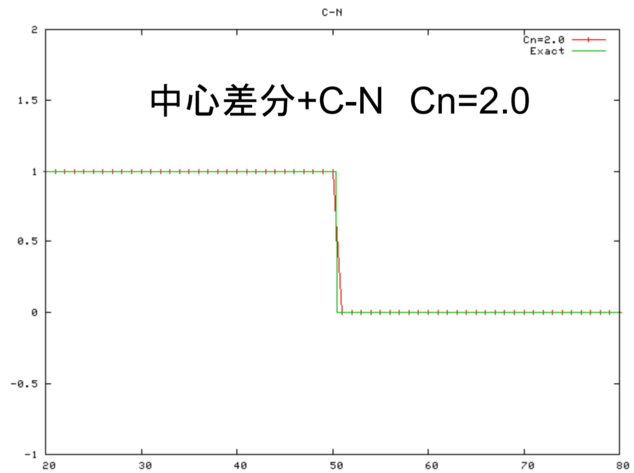
数値例（陰解法）

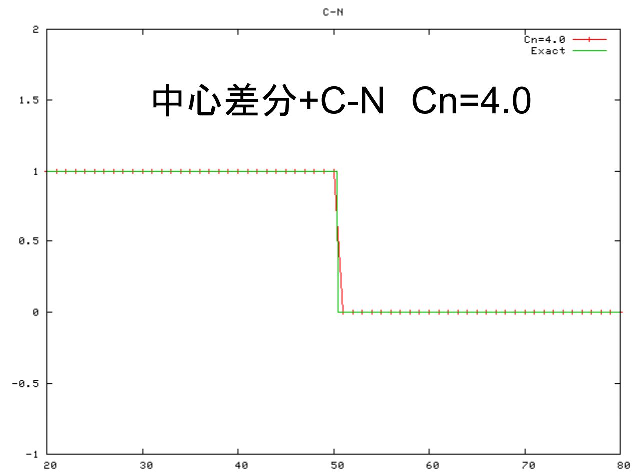








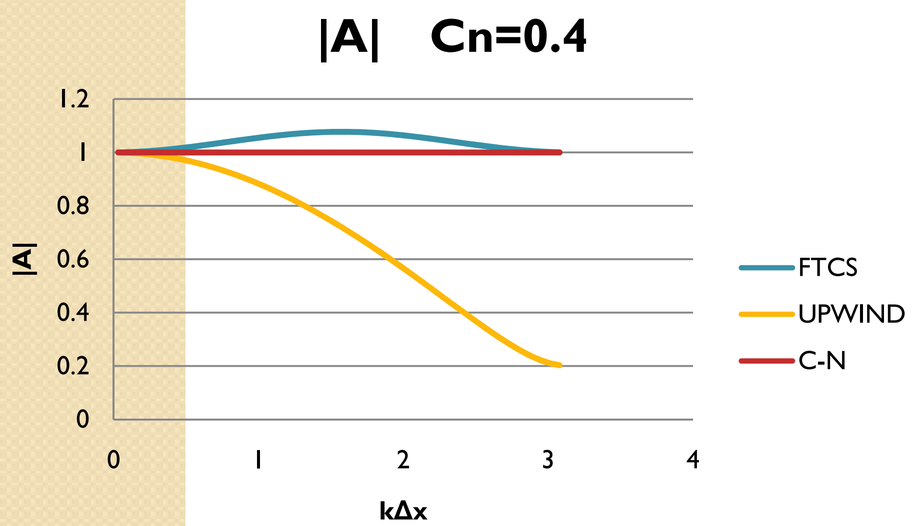




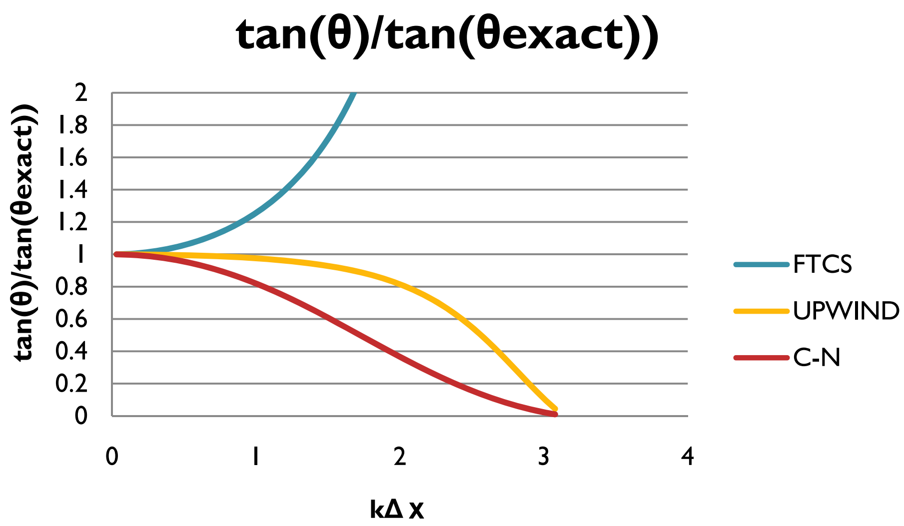
同じで位相誤差により振動が発生

C-N法の振幅誤差、位相誤差(クーラン数=0.4の場合)

振幅誤差



位相誤差



陰解法でクーラン数が大きくとれても、時間発展が正確に計算できる訳ではない

δフォームの陰解法とその改良

$$\frac{Q^{n+1}-Q^n}{\Delta t}+L(Q)=0$$

差分近似　*L*は何かのオペレーター

$$L(Q)=0$$

定常解の条件

$$\delta Q=Q^{n+1}-Q^n$$

δQの導入

δフォームの導入

$$\frac{1}{\Delta t}\delta Q+L(Q+\delta Q)\approx\frac{1}{\Delta t}\delta Q+L(Q)+\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q=0$$

$$\left(\frac{I}{\Delta t}+\frac{\partial L}{\partial Q}\right)\delta Q=-L(Q)$$

*Δt*によらず定常解は不変
∴時間精度は定常解に関係ない

$$\left(\frac{I}{\Delta t}+\frac{\partial \widehat{L}}{\partial Q}\right)\delta Q=-L(Q)$$

右辺を近似しても定常解は不変

実用的な陰解法はこのような手法を用いている

δフォームの具体例

中心差分+陰解法： $$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda \frac{q_{i+1}^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}}{2}$$

δフォームの導入

$$\delta q_i + \lambda \frac{\delta q_{i+1} - \delta q_{i-1}}{2} = -\lambda \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2}$$

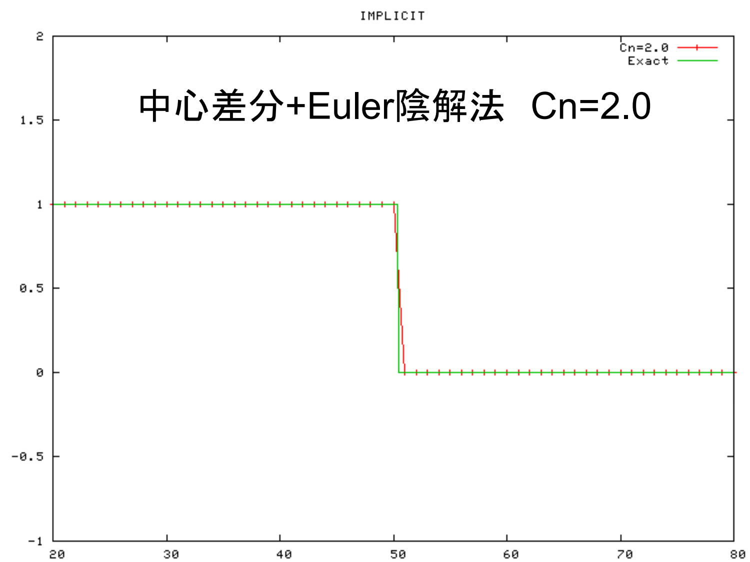
左辺を風上差分に

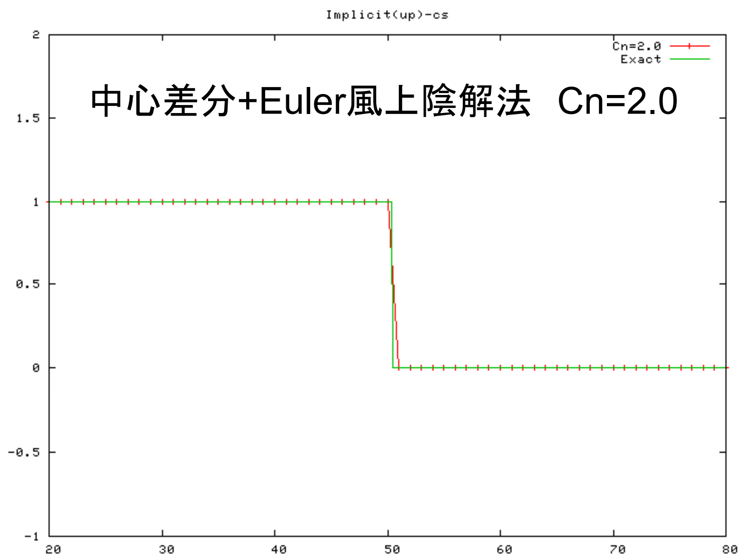
$$\delta q_i + \lambda\left(\delta q_i - \delta q_{i-1}\right) = -\lambda \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2}$$

整理

$$\left(1+\lambda\right)\delta q_i - \lambda \delta q_{i-1} = -\lambda \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2}$$

一方向スィープで解け、メリット大





陰解法　まとめと注意

- 陰解法はクーラン数を大きく取れ、特に定常解を求めるのには有利
- δフォームの陰解法では左辺側に近似形式の可能
- クーラン数を大きく取れるが、同時に時間精度も急速に低下することに注意（特に時間一次精度の場合）
- 一次元線形の場合には適用容易だが、非線形性や多次元の場合の適用法は自明ではなく、様々な工夫が必要

目次

- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

高波数の減衰の必要性

- バーガース方程式(非線形）の場合

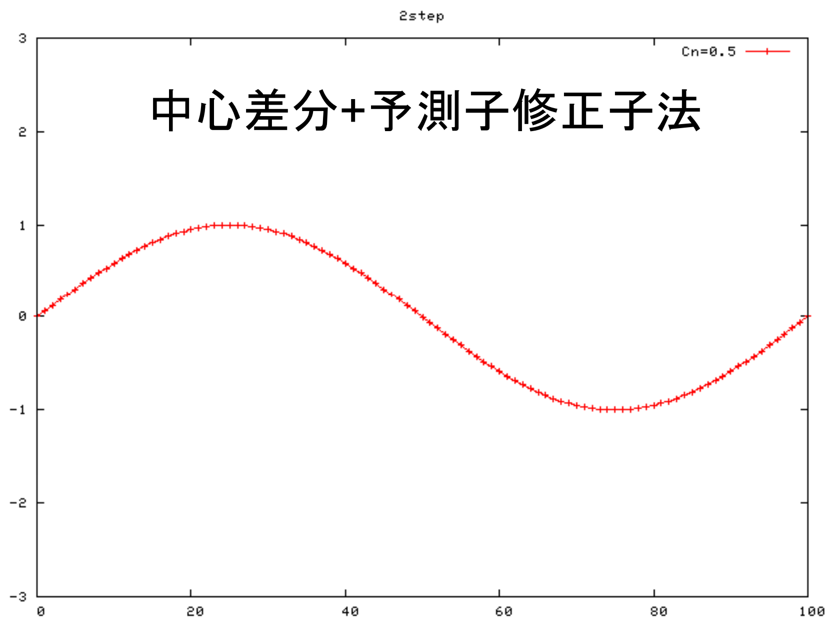
$$u_t + uu_x = 0$$

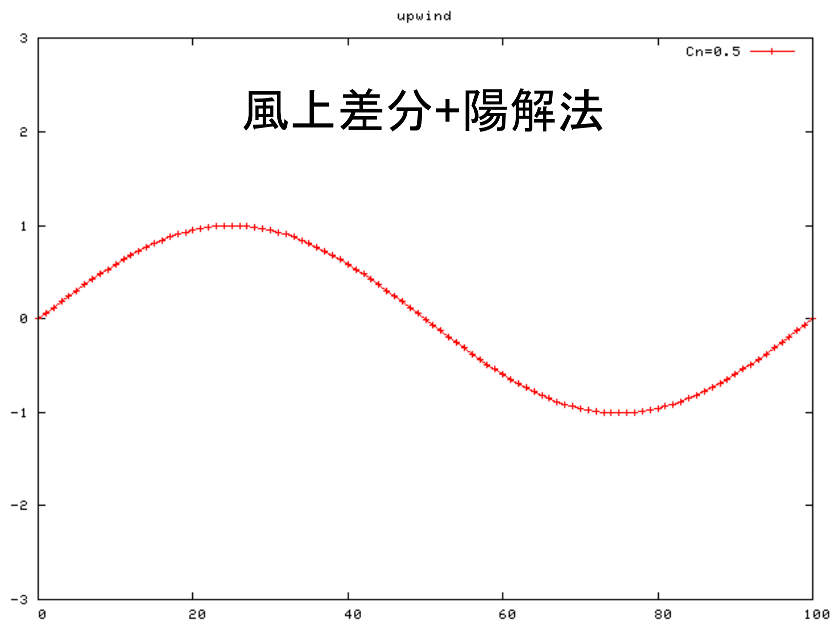
$$u^n = \sin x$$

$$u^n{}_t = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$u^{n+1} \approx \sin x - \Delta t \frac{1}{2}\sin 2x$$

非線形性から高波数が生じる





分子粘性および数値粘性

- 一次元移流拡散方程式（粘性流体）

$$q_t + aq_x = \nu q_{xx}$$

  - セルレイノルズ数 $a\Delta x / \nu$ が十分小ならば安定化
  - DNSはこの流儀に近い
  - 高レイノルズ数の実用問題では望み薄
- 数値粘性の付加
  - 必要最小限度だけ粘性項を加える

$$q_t + aq_x = \nu_a^{(2)} q_{xx} - \nu_a^{(4)} q_{xxxx}$$

  - 数値粘性係数をどのようにに決めるかが問題

風上差分の効果

- 風上差分に含まれる偶数次の誤差項が数値散逸として働く
  - 一次風上法

$$\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta x} = q_x \boxed{- \frac{\Delta x}{2} q_{xx}} + \frac{\Delta x^2}{6} q_{xxx} + O(\Delta x^3)$$

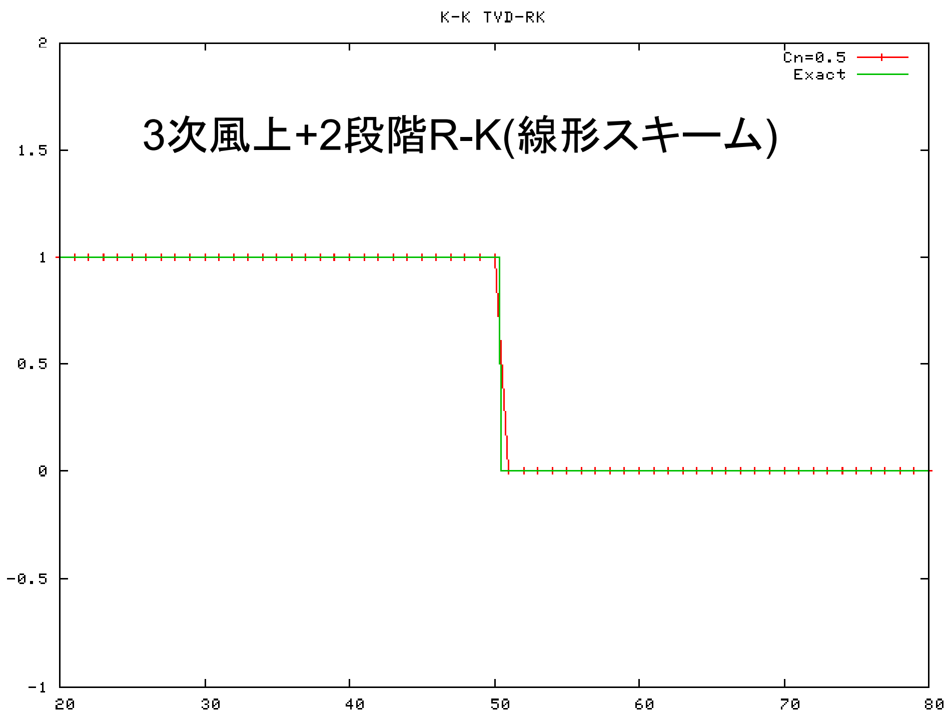
  - 三次風上法

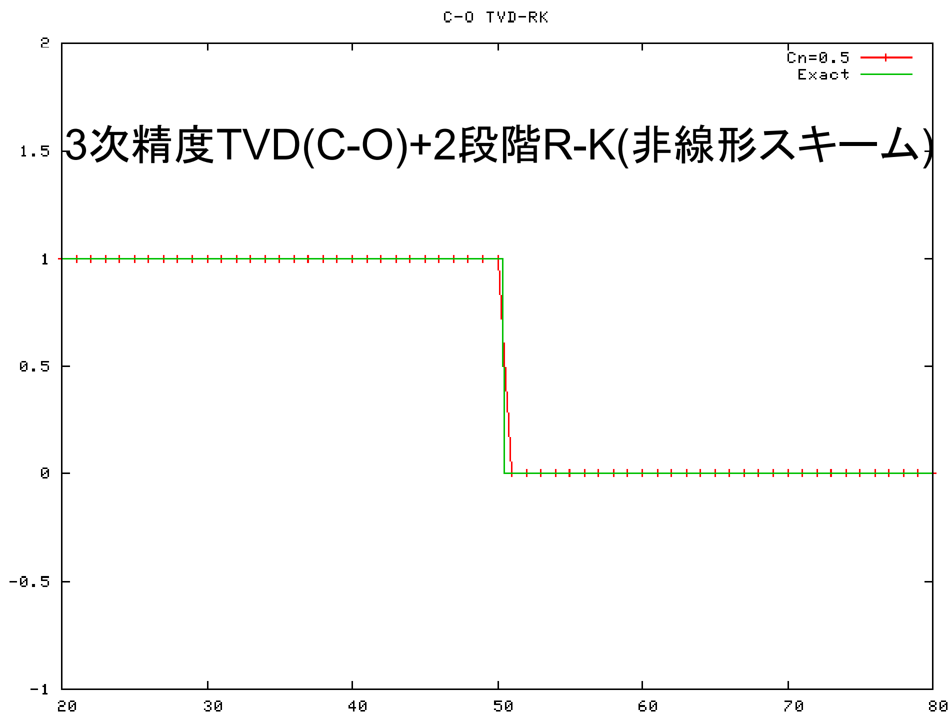
$$\frac{2q_{i+1} + 3q_i - 6q_{i-1} + q_{i-2}}{6\Delta x} = q_x \boxed{+ \frac{\Delta x^3}{12} q_{xxxx}} + O(\Delta x^4)$$

- だが、それだけでは十分ではない・・・

高次精度無振動スキーム

- ゴドノフの定理
  - 「単調な線形スキームは高々一次精度である」
  - 一見、無振動高次精度スキームは不可能にみえる。
  - しかし「線形」の制限を外せば可能





目次

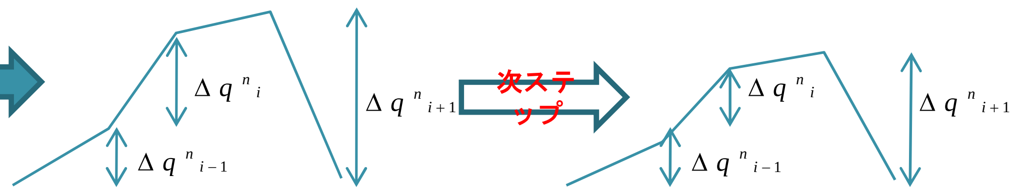
- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

TVD法

- TV安定(Total Variation Diminishing)

$$\sum \left| \Delta q_i^{n+1} \right| \le \sum \left| \Delta q_i^{n} \right|$$

$$\Delta^+ q_i^n = q_{i+1}^n - q_i^n$$



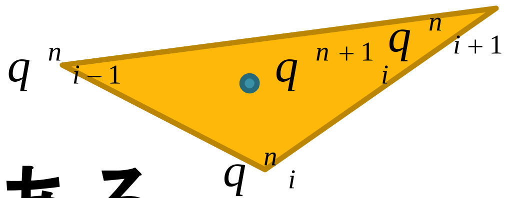
- 十分条件

$$q_i^{n+1} = q_i^n + c_{i+1/2}\Delta^+ q_i - d_{i-1/2}\Delta^+ q_{i-1}$$

$$c_{i+1/2} \ge 0, d_{i-1/2} \ge 0$$

$$\Rightarrow q_i^{n+1} = (1 - c_{i+1/2} - d_{i-1/2}) q_i^n + c_{i+1/2} q_{i+1}^n + d_{i-1/2} q_{i-1}^n$$

$$c_{i+1/2} + d_{i-1/2} \le 1$$



- 一次精度風上法はTVDである

三次風上法のTVD化

- **三次風上法のFVM表記**

$$q_i^{n+1} = q_i^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

$$f_{i+1/2} = a\left\{q_i + \frac{1}{4}(1+\phi)\Delta^+ q_i + \frac{1}{4}(1-\phi)\Delta^+ q_{i-1}\right\}$$

: Φ=1/3

- **制限関数の導入**
  - Chakravarthy-Osher法

$$f_{i+1/2} = a\left\{q_i + \frac{1}{4}(1+\phi)\boxed{\tilde{\Delta}^+ q_i} + \frac{1}{4}(1-\phi)\boxed{\tilde{\tilde{\Delta}}^+ q_{i-1}}\right\}$$

$$\tilde{\Delta}^+ q_{i-1} = \mathrm{minmod}(\Delta^+ q_{i-1}, \beta\Delta^+ q_i) \qquad \tilde{\tilde{\Delta}}^+ q_i = \mathrm{minmod}(\Delta^+ q_i, \beta\Delta^+ q_{i-1})$$

非線形性の導入

$$\mathrm{minmod}(a,b) = \begin{cases} a & |a| \le |b| \\ b & |b| < |a| \\ 0 & ab \le 0 \end{cases} \qquad 1 \le \beta \le \frac{3-\phi}{1-\phi}$$

制限関数は何をしているのか？

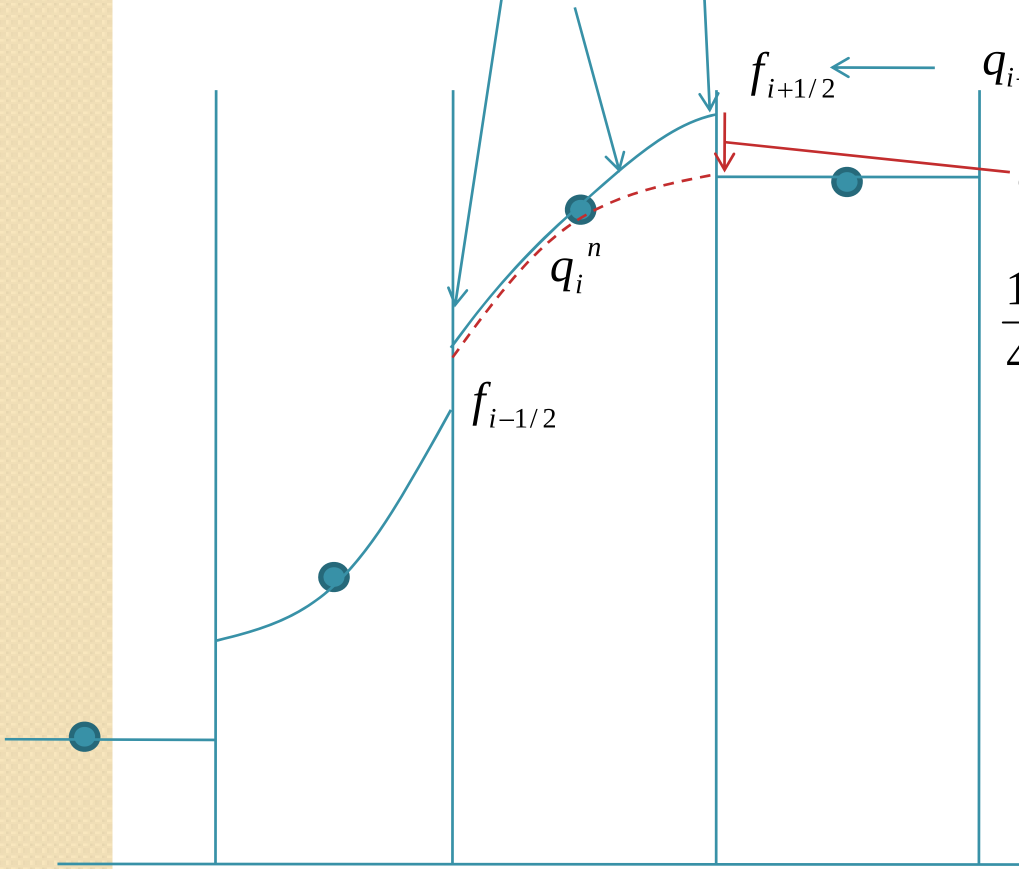
$$q_i^{\,n+1} = q_i^{\,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i-1/2} - f_{i+1/2} \right)$$

$$q_x \approx \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x}\left(\Delta q_i + \Delta q_{i-1}\right)$$

$$q_{xx} \approx \frac{q_{i+1} - 2q + q_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\Delta q_i - \Delta q_{i-1}\right)$$

$$\boxed{q = q_i^{\,n} + x q_x + \phi x^2 q_{xx}}$$

$$q_{i+1/2} = q_i + \frac{1}{4}(1+\phi)\Delta^+ q_i + \frac{1}{4}(1-\phi)\Delta^+ q_{i-1}$$



$$q_{i+1/2} \le q_{i+1}$$

$$\frac{1}{4}(1+\phi)\Delta^+ q_i + \frac{1}{4}(1-\phi)\Delta^+ q_{i-1} \le \Delta^+ q_i$$

$$\Delta^+ q_{i-1} \le \frac{3-\phi}{1-\phi}\Delta^+ q_i$$

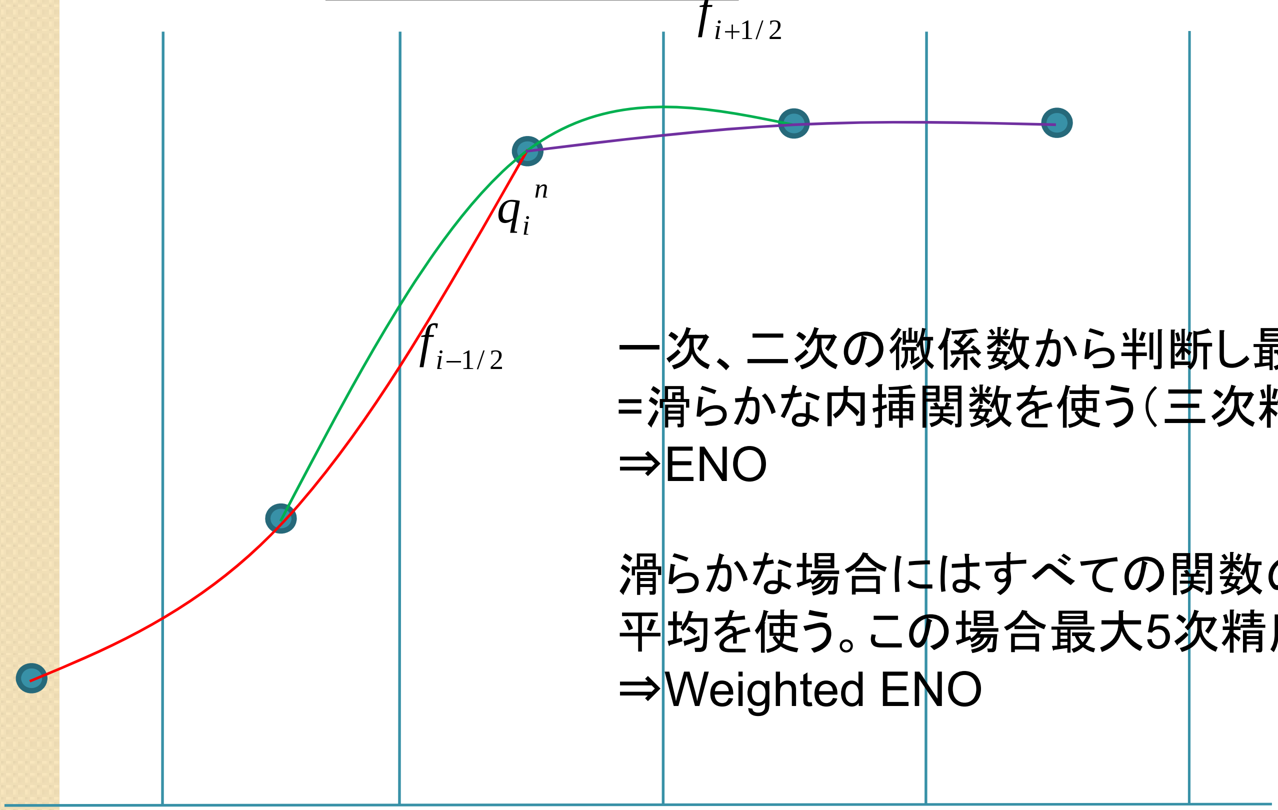
$$\Delta^+ q_{i-1} \Rightarrow \tilde{\Delta}^+ q_{i-1} = \min\left(\Delta^+ q_{i-1}, \frac{3-\phi}{1-\phi}\Delta^+ q_i\right)$$

$$\tilde{\Delta}^+ q_{i-1} = \operatorname{min\,mod}\left(\Delta^+ q_{i-1}, \frac{3-\phi}{1-\phi}\Delta^+ q_i\right)$$

TVD類似の手法：ENO,WENO

- Essensially Non-Oscilating Sheme

$$\boxed{q = q_i^n + xq_x + \phi x^2 q_{xx}}$$



一次、二次の微係数から判断し最も変化の少ない
=滑らかな内挿関数を使う（三次精度の場合）
⇒ENO

滑らかな場合にはすべての関数の重み付き
平均を使う。この場合最大5次精度
⇒Weighted ENO

目次

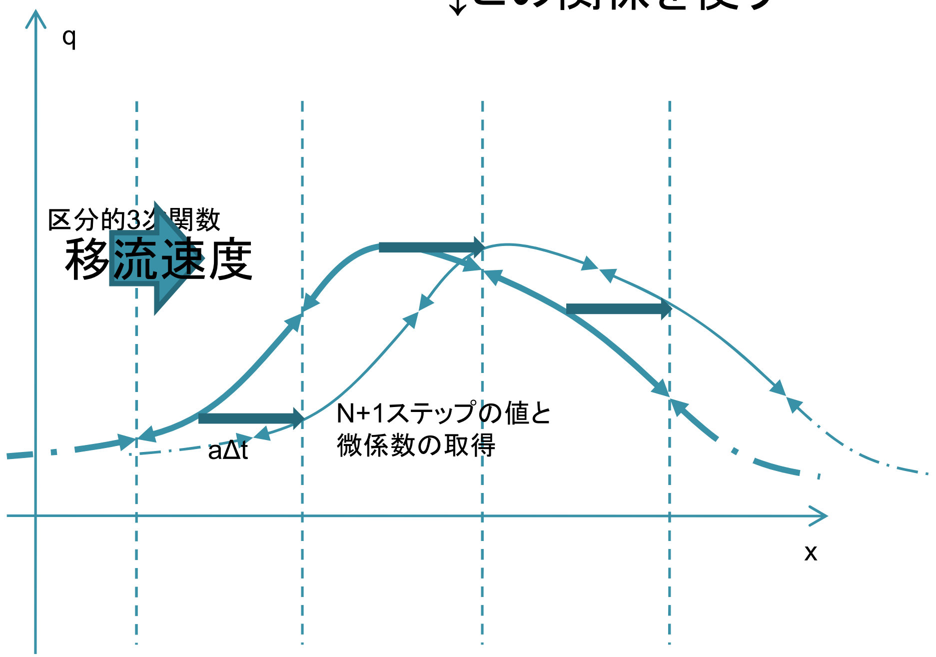
- 移流方程式とその離散化の基本
  - 移流方程式の位置付
  - 差分法、有限体積法、有限要素法の関係
- スキームの安定性、振幅誤差、位相誤差
- 実用コードでの高度なスキーム
  - 陰解法
  - 高次精度化と無振動化
    - 風上法
    - TVD法、ENO法、WENO法
    - CIP法

CIP法（1）

- Cubic Interpolated Polynomial

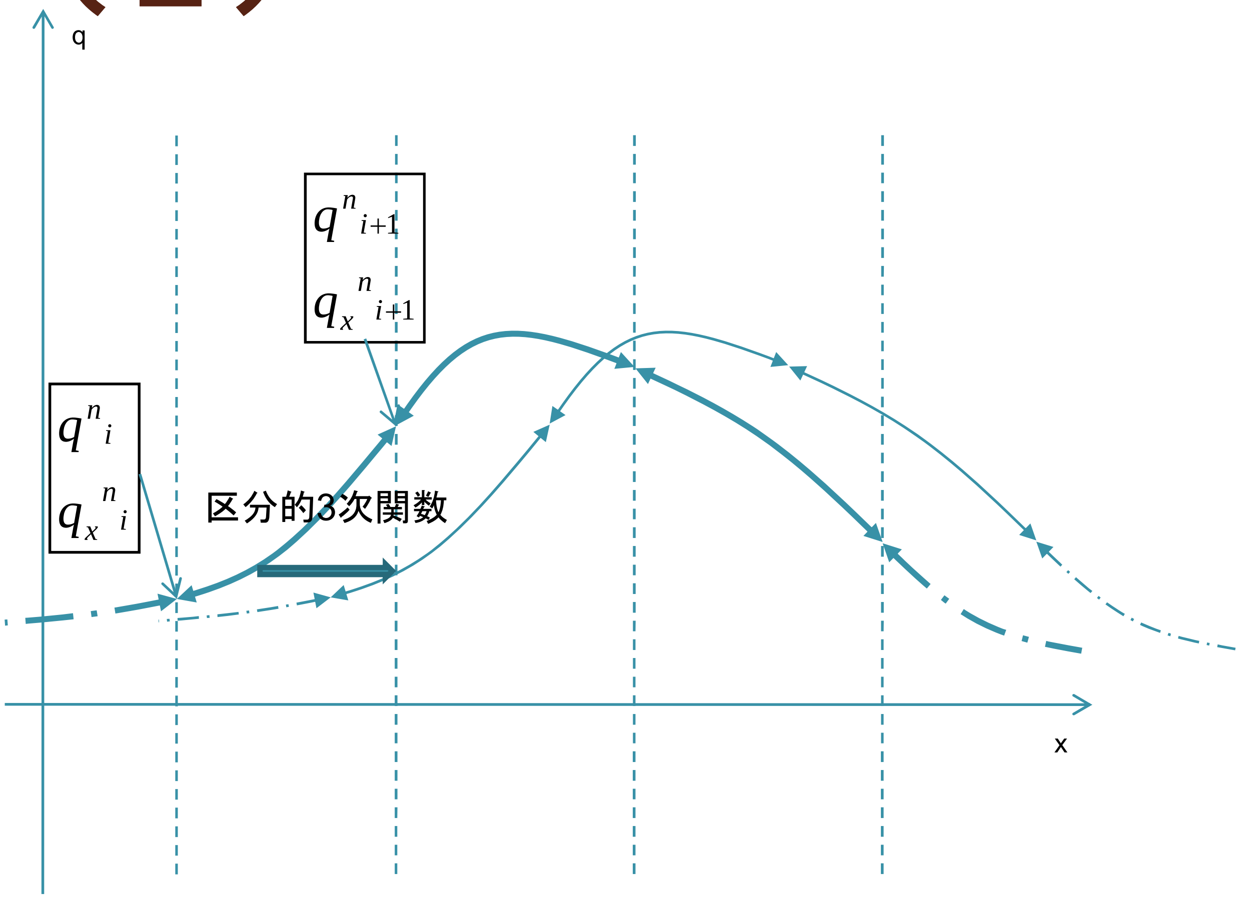
$$q_t + aq_x = 0 \qquad q = g(x - at)$$:移流方程式の解

↓この関係を使う



$$q^{n+1}{}_i = g((n+1)\Delta t, i\Delta x) = g(n\Delta t, i\Delta x - a\Delta t)$$

CIP（2）



$$q_t + aq_x = 0 \qquad q^{n+1}{}_i = g((n+1)\Delta t, i\Delta x) = g(n\Delta t, i\Delta x - a\Delta t)$$

$$(q_x)_t + a(q_x)_x = 0 \quad q_x{}^{n+1}{}_i = g'((n+1)\Delta t, i\Delta x) = g'(n\Delta t, i\Delta x - a\Delta t)$$

CIP（3）：非線形の場合

- **非線形輸送方程式**

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

FVM的方法

$$\rho^{n+1}{}_i = \rho^n{}_i - \frac{1}{\Delta x}\left\{(\rho u)_{i+1/2} - (\rho u)_{i-1/2}\right\} = 0$$

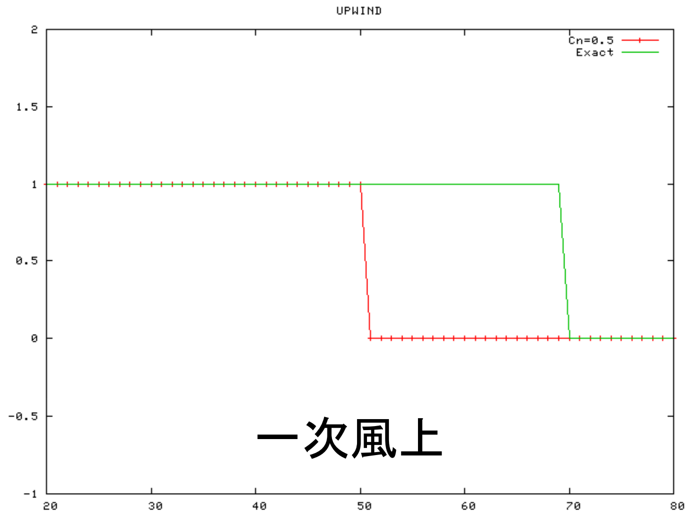
CIP法

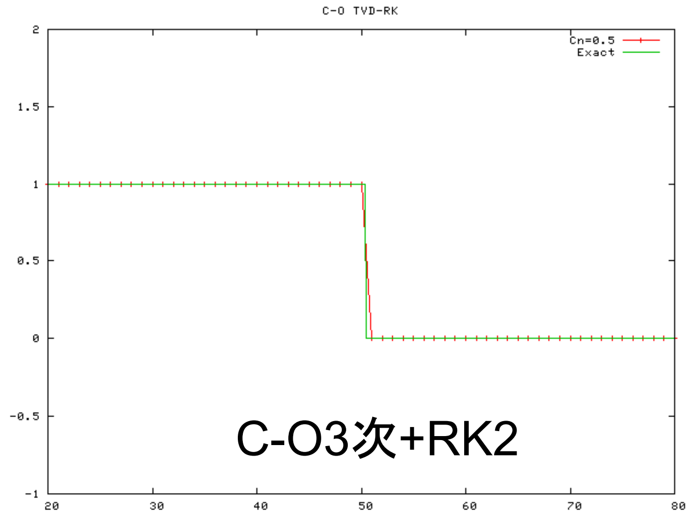
方程式 $\rho_t + u\rho_x = -u_x\rho \quad (\rho_x)_t + u(\rho_x)_x = -u_{xx}\rho - 2u_x\rho_x$

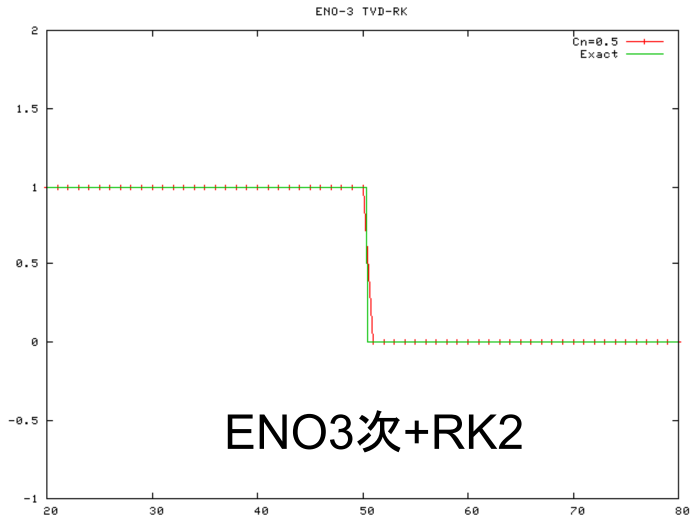
①非移流ステップ $\rho_t = -u_x\rho \quad (\rho_x)_t = -u_{xx}\rho - 2u_x\rho_x$

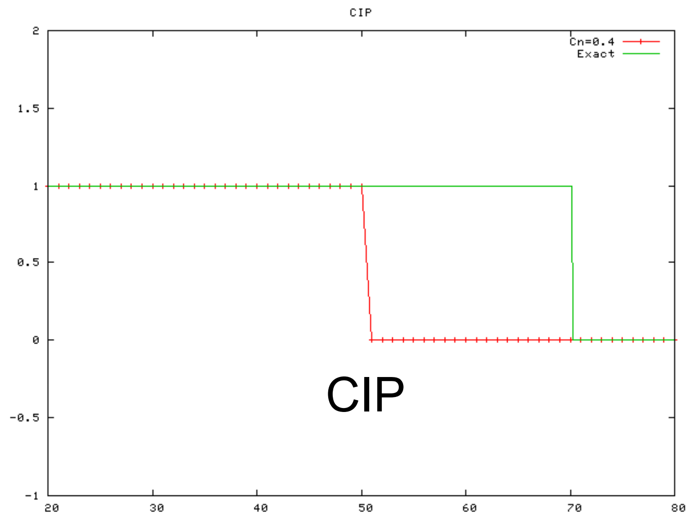
②移流ステップ $\rho_t + u\rho_x = 0 \quad (\rho_x)_t + u(\rho_x)_x = 0$

数値例：ステップの伝搬

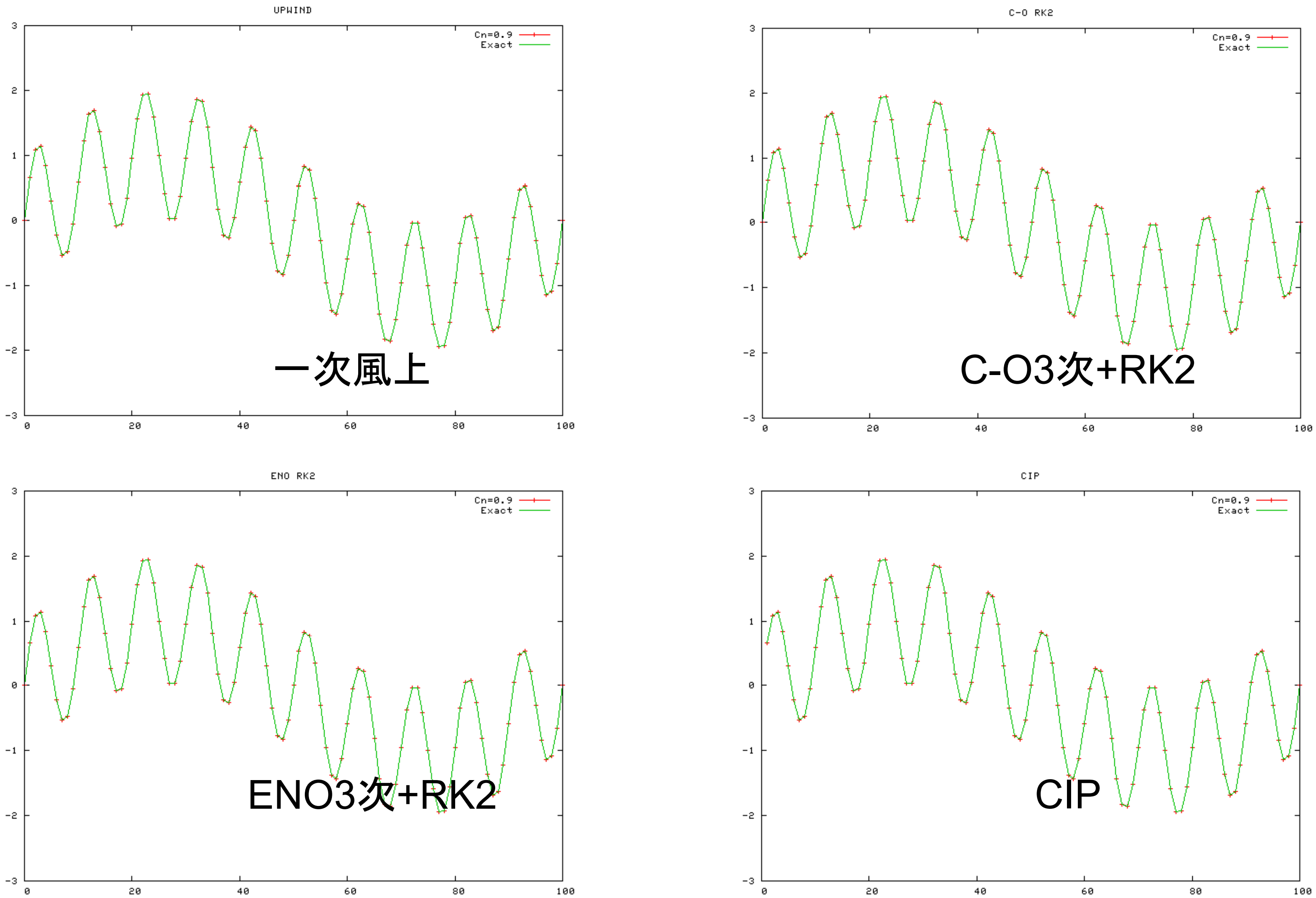

UPWIND
Cn=0.5
Exact
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
20
30
40
50
60
70
80
一次風上


C-O TVD-RK
Cn=0.5
Exact
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
20
30
40
50
60
70
80
C-O3次+RK2


ENO-3 TVD-RK
Cn=0.5
Exact
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
20
30
40
50
60
70
80
ENO3次+RK2


CIP
Cn=0.4
Exact
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
20
30
40
50
60
70
80
CIP

数値例：二重サイン波の伝搬



高次精度無振動スキームのまとめと注意

- TVD、ENO、CIP等の非線形スキームを用いることで高次精度化と無振動化の両立が可能である
- 高波数の波の伝搬を扱うにはENOやCIPの方が良い

- 定常解に関しては２次精度以上のTVDは十分な精度を持っている

ご清聴ありがとうございました

その他

コンパクト差分（陰的差分）

fとf' に関するTaylor展開

$$f_{i+l} = f + (l\Delta x) f' + \frac{1}{2}(l\Delta x)^2 f'' + \frac{1}{6}(l\Delta x)^3 f''' + O(\Delta x^4)$$

$$f'_{i+l} = f' + (l\Delta x) f'' + \frac{1}{2}(l\Delta x)^2 f''' + \frac{1}{6}(l\Delta x)^3 f^{(4)} + O(\Delta x^4)$$

より、例えば、次の関係が成立

4次精度差分公式

$$f'_i = -\frac{1}{12\Delta x}(f_{i+2} - f_{i-2}) + \frac{2}{3\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) + O(\Delta x^4)$$

陰的差分公式： $$\frac{1}{6} f'_{i-1} + \frac{2}{3} f'_i + \frac{1}{6} f'_{i+1} = \frac{1}{2\Delta x}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right) + O(\Delta x^4)$$

連立一次方程式を解くことでf' が求まる

コンパクト差分の評価（１）

fが三角関数であらわされる場合

$$f_i = \exp(jkx) = \exp(jik\Delta x)$$

$$f' = jkf$$

安定性解析とは異なり時間積分は考えていないことに注意

2次精度中心差分の場合

$$\frac{1}{2\Delta x}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right) = \frac{\exp(jk\Delta x) - \exp(-jk\Delta x)}{2\Delta x} f = jk_{e2} f$$

有効波数　$k_{e2} = \dfrac{\sin k\Delta x}{\Delta x}$

4次精度中心差分の場合

$$k_{e4} = \frac{4}{3}\frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{\sin 2k\Delta x}{\Delta x}$$

コンパクト差分の評価（２）

4次精度陰的差分公式:

$$jk_{i4}\left(\frac{1}{6}\exp(-jk\Delta x)+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\exp(jk\Delta x)\right)f = j\frac{\sin k\Delta x}{\Delta x}f$$

$$k_{i4}=\frac{3\sin k\Delta x}{k(2+\cos k\Delta x)}$$