

課題名 (タイトル) :

## レプトン異常磁気能率の高精度理論計算

利用者氏名 : 松川 (仁尾) 真紀子

所属 : 仁科加速器研究センター初田量子ハドロン物理学研究室

1. 本課題の研究の背景、目的、関係するプロジェクトとの関係

本研究では、電子およびミュー粒子（まとめてレプトン粒子と呼ぶ）が生来的に持つ磁気的な性質を、量子電磁気学(QED)理論計算により数値的に求めることを目的としている。求めた理論値と実験値で精密検証を行うことで、素粒子標準理論の破綻を探索することが究極の目標である。また、電子  $g-2$  の理論は微細構造定数  $\alpha$  の式として表され、理論式と実験値が等しいとすることで、微細構造定数  $\alpha$  の値を詳細に決定することができる。現在の  $\alpha$  の世界標準値を、さらに一桁改良することを同時に目指している

電子の異常磁気能率( $g-2$ )の最初の測定は、1947年に Kusch によって行われ、1955年にはこの功績により彼はノーベル物理学賞を受賞している。 $g-2$ の理論的な説明を QED を用いて行ったのが Schwinger で、やはりこの仕事により日本の朝永振一郎や Feynman とともに 1965年のノーベル賞を受賞している。電子  $g-2$ の測定および理論計算がこのような高い評価を受けた理由は明白で、電子を初めとする物質を構成する基本要素である素粒子は場の理論によって記述されるものであるという、物質とは何かという概念にパラダイムシフトをもたらしたことによる。

以後、 $g-2$ の測定および理論計算による相互検証は現在に至るまで物理学に置ける究極の精密検証として行われている。Dehmelt は単一電子を電磁場で捕獲することに成功し、それによって  $g-2$ の実験値を格段に高い精度で決定した。この成果は 1989年に彼にノーベル物理学賞をもたらしている。

Dehmelt の実験方法をさらに改善し、観測装置の理論的な解析を行うことで、最大の誤差の要因を除去することに成功したのが、ハーバード大の Gabrielse のグループである。彼らの 2006年の測定成功の一報は、その年の AIP(American Institute of Physics) の Top Story として遇された。さらに 2008年には同じハーバードのグループからより詳細な値が報告され、 $a_e=(g-2)/2$ とすると

$a_e(\text{HV08})=(1159652180.73\pm 0.28)\times 10^{-12}$  [0.24 ppb] である。

この 10桁の数値は、現在の素粒子理論の標準理論で理論計算により計算可能な量である。素粒子の相互作用のうち、強い力、弱い力による寄与も上記の精度になると考慮しなければならないが、最も大きな寄与を与えるものは電子と光(=光子)との相互作用である量子電磁気学(QED)からの寄与である。

私たちは、QEDからの電子  $g-2$ への寄与を、数値計算に落とし込む方法を開発し、その数値計算を理研の RICC で実行することによって、上記の実験結果に競合するだけの精度の理論値を得る事に成功した。

また、この理論予言値は、その初期入力値として電磁気の相互作用定数である微細構造定数  $\alpha$  をパラメータとするべき級数で表される。そこで、QED理論自身とその計算結果が正しいと過程すると、実験値が理論式に等しいとして、 $\alpha$ の値をやはり ppb の精度で決定することができる。電磁相互作用の強さを示す  $\alpha$  は、素粒子の現象だけでなく、原子や分子、固体物性を決め、化学反応を引き起こし、生命現象の源となる相互作用である。従って、 $\alpha$ は科学全般にわたる最も基本的な物理定数であり、その最も詳細な決定方法が、この電子  $g-2$ を使用したものである。

## 2. 具体的な利用内容、計算方法

QEDによる  $g-2$ の計算は、自由電子からの摂動計算によって効率的に値を求めることができる。摂動計算は結合定数  $\alpha$  のべきでの展開になり、光子と電子の相互作用の様子を絵に表した Feynman 図で表すことができる。 $\alpha$ のべきの1乗から3乗までは解析的な計算の結果が知られており、数値計算結果ともよく一致しており、疑いの余地はない。従って、私たちが数値計算でチャレンジするのは  $\alpha$ の4乗(摂動8次)および5次(摂動10次)の項である。 $\alpha$ が約  $1/137$  であることから、現状では5乗、10次までの計算で十分である。

各ファインマン図からの寄与は、電子および光子の量子論的な自由度の足し上げとして、多次元数値積分

に落とし込むことができる。しかし、ナイーブにファインマン図を積分に書き下しただけでは、その積分は発散積分であり、物理的には意味を持たない。

このナイーブな積分を物理的に意味のあるものにするためには、朝永らによって導入されたくりこみによる紫外発散量の処理が必要となる。さらに、大多数の積分は、光子の質量が 0 であることによる赤外発散をも含んでいる。赤外発散は、木下らによって証明されたように物理的な過程に寄与するすべてのファインマン図を足し上げれば相殺して有限にはなるが、個々のファインマン図に対応する積分ではそうではない。

これらの紫外および赤外発散を処理するカウンター項の構成も含めて、各々の積分から有限量の寄与を求める積分を自動構成するプログラムを、私たちが開発した。10 次の  $g-2$  への寄与を表すファインマン図は 12672 個あり、光子 5 個のみ (setV と呼ぶ) のものに絞っても 6354 個存在する。これを QED の持つ対称性を活用して 389 個の独立な積分にまで減らすことができる。しかし、その 1 個の被積分関数は、プログラム長にしておおよそ 10 万行に達する。これを正確に一字たりとも間違いなく数値積分コードとするためには、自動化は必須であった。積分コード生成自体は、ノートブックパソコンで行える程度の仕事量である。

このようにして生成した数値積分を RICC で実行して積分値を評価する。積分は 9 次元から 13 次元の多次元積分であり、数値計算の世界で俗に言う、「次元の呪い」の影響をまろに受ける。いままでのところ、安定して数値積分を行うことができる積分アルゴリズムは VEGAS による adaptive iterative モンテカルロ積分のみである。さらに、被積分関数は発散項のカウンター項による相殺を行っているため、積分の種類によっては桁落ちにより信頼性のある答えが得られない。それどころか、積分自身が破綻してしまい、実数にはライブラリ実装による偽 4 倍精度を用いる必要がある。

積分一個が長大であること、多次元積分であること、評価すべき積分の数が多いこと、そして偽 4 倍精度が必要であること、これらの理由によって QED の  $g-2$  数値計算には多くの計算資源が必要であった。

10 次の setV に対応する数値計算プログラム自体は RICC の発足以前、2006 年頃にはほぼすべてが出来上がっていた。初期には理研 RSCC において倍精度計算によって、まずは数値積分での評価が現実的に可能かどう

かのテストから始めた。RICC が稼働を開始し計算資源が飛躍的に多くなり、ようやく偽 4 倍精度計算が実行可能となった。おかげでもっとも桁落ちが厳しく数値計算の困難なものでも、評価が可能となり、生産的な積分実行が可能となった。

ファインマン図の積分表示は超平面上にある 14 個のパラメタで表現される。この超平面を 13 次元の単位超立方体にマップする方法は、多数あり、そのマップ方法ごとに全くことなる被積分関数の形状を持つ積分となる。マップの選び方によって VEGAS のアルゴリズムとの相性の善し悪しがあり、結果、数値積分の収束の早さと不確定性の評価自体の信頼性に大きく影響を及ぼす。数値積分でモンテカルロのサンプリング点を十分に多くとることができれば、このマップの選び方による収束の早さは問題にならないが、10 次 SetV の場合、現状の RICC で実行可能なサンプル数はたかだか  $10^9$  程度である。偽 4 倍精度では 1 個の積分を一回行うのに、128 コア並列で約一日を要する。これは 13 次元超立法体のなかでは、非常に少ない点であり、より良いマッピングを選ぶことが必須である。また、マッピングを変更しても積分値が変化しないことで、積分値の信頼性の強力な傍証にもなる。

以上のことから、昨年度および今年度は SetV の積分 389 個すべてにおいて、マッピングを見直し、経験上より収束が早いと思われるものに変更し、再計算を行った。特に、倍精度で計算が可能なものについては、計算機の SIMD 機構を十分に活用し、3 倍近くの高速度を実現した。

### 3. 結果

10 次  $g-2$  への QED からの寄与でもっとも誤差の大きい SetV の 389 個の積分について再評価を行い、より信頼性の高い値を得た。

偽 4 倍精度を必要とする積分においては、マッピングを変更しても積分値は変更を受けず、前回の計算自身が十分に信頼できることがわかった。結果、今回と前回の計算結果を統計的に平均することで、すべての積分の不確定性を 0.38 以下にすることができた。

一方、倍精度で実行可能な積分は、収束も早く、簡単に目標とする各々の不確定性よりも小さな値を出すため、問題は少ないと思われていた積分群である。しかし、マッピングを変更してみると、積分の収束度に

大きな差があり、積分値が不確定性の 2 倍近く前回数よりも移動するものも存在した。これらの積分を個々に詳細分析し、より収束の良いマッピングで計算を行ったものを信頼性の高いものとして、結果に採用した。

2014 年度末が CODATA による基本定数決定のための参考文献の締め切りであったため、それにあわせてぎりぎりまで RICC において計算を実行し不確定性の改良を目指した。2014 年度末に 8 次の寄与

$$A_1^{(8)} = -1.912\ 98 \pm 0.000\ 84$$

$$A_1^{(10)} = 7.795 \pm 0.336$$

を得た。これは 2012 年の私たちの速報結果から、それぞれ 2.4 倍, 1.7 倍の精度改良になっている。8 次の値は 2012 年から不確定性の範囲内の移動であるが、10 次では、-1.4 の移動と不確定性を大幅に上回っているが、今回の値がより信頼度の高いものであることは、先に述べた通りである。

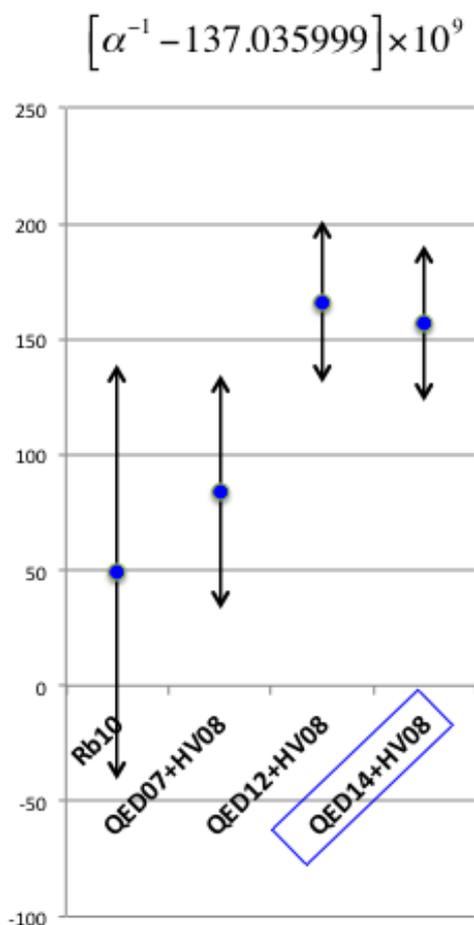
また、この新しい QED の結果を用いて、ハーバード大の実験結果とあわせて最新の微細構造定数  $\alpha$  の値を決めた。右図にはいろいろな決定法による  $\alpha$  の値を示したものである。Rb10 は、ルビジウム原子を光学格子に乗せ、その反跳を測定した結果を、水素原子スペクトル測定から決めたリュウドベリ定数と組み合わせて決めた  $\alpha$  の値である。他の 3 つは電子 g-2 によるもので、それぞれ 2007 年、2012 年、2014 年での QED の結果を用いたものである。

素粒子標準理論の予言としての電子 g-2 の値を得るには、入力値としての  $\alpha$  の値が必要で、これには先の Rb10 を用いる。すると

$$a_e(\text{theory}) = (1159652181.643$$

$$\pm 0.025 \pm 0.023 \pm 0.016 \pm 0.763) \times 10^{-12}$$

となり、誤差はそれぞれ 10 次と 8 次の QED 計算、ハドロン寄与、そして  $\alpha$  (Rb10) によっている。これは不確定性の範囲内で実験値と完全に一致している。



#### 4. 今後の展望

$a_e(\text{theory})$  のそれぞれの不確定性の寄与からみてもわかる通り、現状の QED の不確定性はハドロンのそれよりわずかに 1.5 倍大きい程度となっている。より正確な数値積分の評価を行い、かつ、ハドロンの寄与の不確定性よりも QED 計算の不確定性を小さくすることが当面の目標である。

幸い、2014 年当初に VEGAS の積分グリッドの決定アルゴリズムに改良を加えたものが発表された。これを次期の理研のコンピュータで高速計算ができるよう書き換えることで、積分結果のマッピング依存という問題が回避できる可能性がある。

また、現状の偽 4 倍精度ライブラリは array 版ではあるが、演算子の再定義を利用しているため、コンパイラの自動生成での SIMD 利用は不可能となっている。そのため、倍精度計算ほどの高速化が実現できていない。実際のライブラリの書き換えにあたっては、実行するコンピュータと利用するコンパイラを絞りこんだうえで、高速化の方法を探っていくべき。

平成 26 年度 RICC 利用研究成果リスト

**【論文、学会報告・雑誌などの論文発表】**

“Tenth-order electron anomalous magnetic moment: Contribution of diagrams without closed lepton loops”, Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. arXiv:1412.8284, to be published in Physical Review D91.

**【国際会議などの予稿集、proceeding】**

“QED tenth-order contribution to the electron  $g-2$  and a new value of the fine structure constant”, Makiko Nio, proceedings of “Fundamental Constants Meeting 2015”, Eltville, Germany (1-6 February 2015), in preparation.

**【国際会議、学会などでの口頭発表】**

“QED tenth-order contribution to the electron  $g-2$  and a new value of the fine structure constant”, Makiko Nio, invited talk at “Fundamental Constants Meeting 2015”, Eltville, Germany (1-6 February 2015).